

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математических методов и моделей в экономике

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета экономики и управления

О.В. Буреш

(подпись, расшифровка подписи)

"24" апреля 2015 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

### ДИСЦИПЛИНЫ

*«Б.1.В.ОД.3 Случайные процессы и основы теории массового обслуживания»*

Уровень высшего образования

БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки

01.03.04 Прикладная математика

(код и наименование направления подготовки)

Применение математических методов к решению инженерных и экономических задач

(наименование направленности (профиля) образовательной программы)

Тип образовательной программы

Программа академического бакалавриата

Квалификация

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Оренбург 2015

**Рабочая программа дисциплины «Б.1.В.ОД.3 Случайные процессы и основы теории массового обслуживания» /сост. А.Г. Реннер, О.Н. Яркова - Оренбург: ОГУ, 2015**

Рабочая программа предназначена студентам очной формы обучения по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика

© Реннер А.Г.,  
Яркова О.Н., 2015  
© ОГУ, 2015

## Содержание

1 Цели и задачи освоения дисциплины .....	4
2 Место дисциплины в структуре образовательной программы .....	4
3 Требования к результатам обучения по дисциплине .....	6
4 Структура и содержание дисциплины .....	8
4.1 Структура дисциплины .....	8
4.2 Содержание разделов дисциплины .....	9
4.3 Лабораторные работы .....	10
4.4 Практические занятия (семинары) .....	10
5 Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации	11
5.1 Вопросы для текущего контроля успеваемости и зачетов	11
5.2 Вопросы к экзамену	13
5.3 Примерный вариант контрольных тестовых заданий по темам	13
6 Учебно-методическое обеспечение дисциплины .....	16
6.1 Основная литература .....	16
6.2 Дополнительная литература .....	17
6.3 Периодические издания .....	17
6.4 Интернет-ресурсы .....	18
6.5 Программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы современных информационных технологий .....	18
7 Материально-техническое обеспечение дисциплины .....	18
Лист согласования рабочей программы дисциплины .....	19
Дополнения и изменения в рабочей программе дисциплины .....	
Приложения:	
Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине .....	
Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины .....	

## 1 Цели и задачи освоения дисциплины

**Цели дисциплины:** формирование теоретических знаний о математических методах описания и исследования стохастических динамических систем и практических навыков использования прикладного программного обеспечения для их решения.

**Задачи:**

- освоить способы описания случайных процессов;
- изучить основные типы случайных процессов (по свойствам), некоторые виды случайных процессов и их свойства;
- изучить методы исследования дискретных и непрерывных цепей Маркова;
- освоить методы моделирования простейших марковских систем массового обслуживания (СМО);
- освоить методы моделирования динамики стохастических систем в формах Стратоновича и Ито;
- освоить методы моделирования непрерывных марковских процессов с непрерывным временем;
- освоить инструментальные и программные средства решения поставленных задач.

## 2 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к обязательным дисциплинам (модулям) вариативной части блока 1 «Дисциплины (модули)»

Пререквизиты дисциплины: *Б.1.Б.3 Иностранный язык, Б.1.Б.10 Математический анализ, Б.1.Б.11 Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Б.1.Б.15 Дифференциальные и разностные уравнения, Б.1.Б.17 Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов Б.1.Б.21 Программирование для электронно-вычислительных машин, Б.1.В.ОД.5 Основы информатики, Б.1.В.ОД.6 Объектно-ориентированный анализ и программирование*

Требования к входным результатам обучения, необходимым для освоения дисциплины

Предварительные результаты обучения, которые должны быть сформированы у обучающегося до начала изучения дисциплины	Компетенции
<p><b>Знать:</b> материал перечисленных выше дисциплин на уровне, позволяющий осуществлять коммуникации в устной и письменной форме</p> <p><b>Уметь:</b> использовать знания перечисленных выше дисциплин в рамках межличностного общения</p> <p><b>Владеть:</b> навыками решения задач межличностного общения</p>	ОК-5 способностью к коммуникации в устной и письменной формах на русском и иностранном языках для решения задач межличностного и межкультурного взаимодействия
<p><b>Знать:</b> основные положения, приведенных выше предметных областях, что позволит самостоятельно проводить исследования.</p> <p><b>Уметь:</b> использовать знания в приведенных выше предметных областях для проведения самостоятельной работы.</p> <p><b>Владеть:</b> навыки использования знаний в приведенных выше предметных областях при проведении самостоятельных исследований.</p>	ОПК-1 готовностью к самостоятельной работе
<p><b>Знать:</b> современные математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии прогнозирования для их использования при решении прикладных задач.</p> <p><b>Уметь:</b> использовать современные математические методы, современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии прогнозирования при решении прикладных</p>	ОПК-2 способностью использовать современные математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии

Предварительные результаты обучения, которые должны быть сформированы у обучающегося до начала изучения дисциплины	Компетенции
<p>задач.  <b>Владеть:</b> навыками использования современного математического и программного инструментария при решении прикладных задач. математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии программирования</p>	<p>программирования</p>
<p><b>Знать:</b> стандартные пакеты прикладных программ для решения практических задач на ЭВМ, и приемы отладки и тестирования ПО.  использовать стандартные пакеты прикладных программ для  <b>Уметь:</b> решения прикладных задач с использованием инструментария из приведенной выше предметной области.  <b>Владеть:</b> навыками использования и тестирования прикладного ПО.</p>	<p>ПК-1 способностью использовать стандартные пакеты прикладных программ для решения практических задач на электронных вычислительных машинах, отлаживать, тестировать прикладное программное обеспечение</p>
<p><b>Знать:</b> способы настройки, тестирования, проверки ВТ и программных средств, используемых для решения задач в приведенной выше предметной области.  <b>Уметь:</b> осуществлять настройку, тестирование, проверку ВТ и программных средств, используемых при решении прикладных задач.  <b>Владеть:</b> навыками настройки, тестирования, проверки ВТ и программных средств при решении практических задач с использованием приведенного выше инструментария.</p>	<p>ПК-2 способностью и готовностью настраивать, тестировать и осуществлять проверку вычислительной техники и программных средств</p>
<p><b>Знать:</b> современные языки программирования, для решения практических задач, с использованием инструментария приведенного выше.  <b>Уметь:</b> использовать современные языки программирования, при решении практических задач с использованием инструментария приведенного выше.  <b>Владеть:</b> навыками использования современных языков программирования при решении практических задач с использованием инструментария приведенного выше.</p>	<p>ПК-3 способностью и готовностью демонстрировать знания современных языков программирования, операционных систем, офисных приложений, информационно-телекоммуникационной сети "Интернет" (далее - сеть Интернет), способов и механизмов управления данными, принципов организации, состава и схемы работы операционных систем</p>
<p><b>Знать:</b> приведенный выше математический инструментарий, позволяющий от естественнонаучной постановки проблемы перейти к математически формализованной задаче.  <b>Уметь:</b> использовать для решения математически формализованной задачи подходящий инструментарий.  <b>Владеть:</b> навыками математической формализации проблемы возникающей входе профессиональной деятельности и подбора для её решения наиболее подходящего инструментария.</p>	<p>ПК-9 способностью выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат</p>
<p><b>Знать:</b> методы сбора, обработки и управления информацией при решении практических задач.  <b>Уметь:</b> выбирать методы обработки и управления информацией при решении практических задач.  <b>Владеть:</b> навыками принятия управленческих решений, на основе результатов обработки и анализа информации.</p>	<p>ПК-11 готовностью применять знания и навыки управления информацией</p>

Предварительные результаты обучения, которые должны быть сформированы у обучающегося до начала изучения дисциплины	Компетенции
<p><b>Знать:</b> инструментарий приведенной выше предметной области, позволяющий самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных дисциплин.</p> <p><b>Уметь:</b> использовать приведенный выше инструментарий для изучения новых разделов фундаментальных дисциплин.</p> <p><b>Владеть:</b> навыками использования знаний приведенного выше инструментария для изучения новых разделов фундаментальных дисциплин.</p>	ПК-12 способностью самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук

Постреквизиты дисциплины: *Б.1.Б.19 Математическое моделирование, Б.1.В.ДВ.1.1 Методы финансовой и страховой математики, Б.1.В.ДВ.1.2 Методы финансовой и страховой математики в логистике, Б.1.В.ДВ.6.2 Уравнения в частных производных и математические модели в экономике, Б.1.В.ДВ.7.1 Имитационное моделирование, Б.1.В.ДВ.7.2 Имитационное моделирование логистических систем, Б.2.В.П.1 Производственная практика*

### 3 Требования к результатам обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих результатов обучения

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
<p><b>Знать:</b> основные понятия, положения и результаты дисциплины СПиОТМО, позволяющие проводить самостоятельную работу в указанных выше предметных областях.</p> <p><b>Уметь:</b> использовать знания, полученные при освоении дисциплины СПиОТМО, для проведения самостоятельной работы в указанных выше предметных областях.</p> <p><b>Владеть:</b> навыками применения полученных знаний при решении практических задач в указанных выше предметных областях.</p>	ОПК-1 готовностью к самостоятельной работе
<p><b>Знать:</b> современные математические методы, современные прикладные программные средства решения задач дисциплин СПиОТМО.</p> <p><b>Уметь:</b> использовать современные математические методы, современные прикладные программные средства, используемые в СПиОТМО, для решения практических задач в указанных выше предметных областях.</p> <p><b>Владеть:</b> навыками использования математического и программного инструментария СПиОТМО для решения практических задач в указанных выше предметных областях.</p>	ОПК-2 способностью использовать современные математические методы и современные прикладные программные средства и осваивать современные технологии программирования
<p><b>Знать:</b> стандартные пакеты прикладных программ для решения практических задач СПиОТМО, позволяющие проводить исследования в указанных выше предметных областях.</p> <p><b>Уметь:</b> использовать стандартные пакеты прикладных программ для решения практических задач СПиОТМО, позволяющие проводить исследования в указанных выше предметных областях.</p> <p><b>Владеть:</b> навыками использования стандартных пакетов прикладных программ для решения практических задач СПиОТМО, позволяющих провести исследование в указанных выше предметных областях.</p>	ПК-1 способностью использовать стандартные пакеты прикладных программ для решения практических задач на электронных вычислительных машинах, отлаживать, тестировать прикладное программное обеспечение
<p><b>Знать:</b> основные приемы моделирования стохастических процессов, позволяющие перейти от естественнонаучной сущности проблемы к математически формализованной модели.</p> <p><b>Уметь:</b> подбирать инструментарий для исследования математически</p>	ПК-9 способностью выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
формализованной модели. <b>Владеть:</b> навыкам построения математической модели для исследования естественнонаучной проблемы и проведение анализа..	профессиональной деятельности, готовностью использовать для их решения соответствующий естественнонаучный аппарат
<b>Знать:</b> математические методы моделирования и аппарат исследования построенных моделей. <b>Уметь:</b> осуществлять математическое моделирование в указанных выше предметных областях, задач, проводить их исследования и анализ результатов. <b>Владеть:</b> навыками математического моделирования, исследования и анализа результатов поставленных задач.	ПК-10 готовностью применять математический аппарат для решения поставленных задач, способностью применить соответствующую процессу математическую модель и проверить ее адекватность, провести анализ результатов моделирования, принять решение на основе полученных результатов
<b>Знать:</b> методы сбора, обработки и анализа информации о случайных процессах и системах массового обслуживания. в указанных выше указанных областях. <b>Уметь:</b> использовать обработанную информацию при принятии решений в приведенных выше предметных областях. <b>Владеть:</b> навыками сбора, обработки и анализа информации о СП и системах массового обслуживания, позволяющими выработать управленческие решения.	ПК-11 готовностью применять знания и навыки управления информацией
<b>Знать:</b> инструментарий теории СП, позволяющий самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных дисциплин. <b>Уметь:</b> использовать аппарат СП при самостоятельном изучении новых разделов фундаментальных дисциплин. <b>Владеть:</b> навыками исследования СП и моделирование СМО при изучении новых разделов фундаментальных дисциплин.	ПК-12 способностью самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук

## 4 Структура и содержание дисциплины

### 4.1 Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц (180 академических часов).

Вид работы	Трудоемкость, академических часов	
	5 семестр	всего
<b>Общая трудоёмкость</b>	<b>180</b>	<b>180</b>
<b>Контактная работа:</b>	<b>67,25</b>	<b>67,25</b>
Лекции (Л)	34	34
Практические занятия (ПЗ)	16	16
Лабораторные работы (ЛР)	16	16
Консультации	1	1
Промежуточная аттестация (зачет, экзамен)	0,25	0,25
<b>Самостоятельная работа:</b> - выполнение индивидуального творческого задания (ИТЗ); - выполнение расчетно-графического задания (РГЗ); - написание реферата (Р);	<b>112,75</b>	<b>112,75</b>

Вид работы	Трудоемкость, академических часов	
	5 семестр	всего
<ul style="list-style-type: none"> <li>- <i>написание эссе (Э);</i></li> <li>- <i>самостоятельное изучение разделов (перечислить);</i></li> <li>- <i>самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий);</i></li> <li>- <i>подготовка к лабораторным занятиям;</i></li> <li>- <i>подготовка к практическим занятиям;</i></li> <li>- <i>подготовка к коллоквиумам;</i></li> <li>- <i>подготовка к рубежному контролю и т.п.)</i></li> </ul>		
<b>Вид итогового контроля (зачет, экзамен, дифференцированный зачет)</b>	<b>экзамен</b>	

Разделы дисциплины, изучаемые в 5 семестре

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов				
		всего	аудиторная работа			внеауд. работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1	Обзор: описание случайных процессов и их характеристик		2	2	-	
2	Типы случайных процессов		2	4	-	
3	Элементы стохастического анализа		2	-	-	
4	Дискретные и непрерывные цепи Маркова		4	-	4	
5	Моделирование СМО		6	-	6	
6	Элементы спектральной теории стационарных случайных процессов		2	-	-	
7	Линейные преобразования случайных процессов		6	-	6	
8	Стохастические модели состояния		6	8	-	
9	Марковские процессы с непрерывным множеством состояний		4	2	-	
	Итого:	180	34	16	16	114
	Всего:	180	34	16	16	114

#### 4.2 Содержание разделов дисциплины

Таблица 1 – Содержание разделов дисциплины

№ раздела	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
1	<b>Обзор: описание случайных процессов и их характеристик</b>	Случайный $n$ -мерный процесс, траектории случайного процесса, временные сечения. Законы распределения - $N$ -мерные. Математическое ожидание, ковариационная матрица, ковариационная функция, взаимная ковариационная функция.	(ИО), (К)
2	<b>Типы случайных процессов</b>	Стационарные случайные процессы (СП) в узком смысле, свойства. Стационарные СП в широком смысле. Эргодические процессы. Процессы с независимыми приращениями,	(ИО), (К)

		свойства. Процессы с ортогональными приращениями, свойства. Гауссовские случайные процессы, свойства. Винеровский случайный	
Продолжение таблицы 1			
№ раздела	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	2	3	4
		процесс, свойства. Марковский случайный процесс, свойства. Пуассоновский случайный процесс, свойства.	
3	<b>Элементы стохастического анализа</b>	Сходимость в L2. Непрерывность. Дифференцируемость. Интегрируемость.	<b>(ИО)</b>
4	<b>Дискретные и непрерывные цепи Маркова</b>	Дискретные цепи Маркова: основные понятия. Вероятности состояний, вероятности перехода. Однородные цепи. Основные задачи анализа цепей Маркова. Классификация состояний. Классификация цепей. Расчет характеристик. Предельные вероятности состояний. Непрерывные цепи Маркова: Основные понятия. Система уравнений Колмогорова. Решение задачи Коши в случае: неоднородной цепи Маркова, свойства решения; однородных цепей Маркова, свойства решения. Предельные вероятности состояний и их моделирование. Процессы гибели-размножения, циклические процессы.	<b>(ИО), (К), (ЛР)</b>
5	<b>Моделирование СМО</b>	Процессы массового обслуживания: основные понятия, классификации СМО. Поток событий: стационарный (однородный), ординарный, без последствия, простейший, пуассоновский. СМО типа М/М/1 с отказами: модель, расчет характеристик. Другие типы СМО. Обзор подходов к их анализу.	<b>(ИО), (К), (ЛР), (ДЗ)</b>
6	<b>Элементы спектральной теории стационарных случайных процессов</b>	Стационарные случайные процессы с дискретным спектром. Стационарные случайные процессы с непрерывным спектром.	<b>(ИО), (К)</b>
7	<b>Линейные преобразования случайных процессов</b>	Линейные преобразования случайных процессов, свойства, характеристики. Преобразования дискретных и непрерывных случайных процессов операторами свертки, свойства, характеристики. Условия стационарности преобразованных случайных процессов. Спектральные функции. Формирующие фильтры	<b>(ИО), (К), (ЛР), (ДЗ)</b>
8	<b>Стохастические модели состояния</b>	Эволюция моделей динамики: от детерминированной к стохастической. Стохастические интегралы и дифференциалы. Интеграл от винеровского процесса, по винеровскому; свойства. Стохастический дифференциал в форме Ито и Стратоновича. Правило дифференцирования Ито.	<b>(ИО), (К), (ДЗ)</b>
9	<b>Марковские процессы с непрерывным</b>	Уравнение Маркова-Смолуховского-Чепмена-Колмогорова. Уравнения Колмогорова. Стоха-	<b>(ИО), (К)</b>

	<b>временем непрерывным множеством состояний</b>	и стические модели состояния и уравнения Колмогорова. Характерные задачи теории марковских случайных процессов.	
--	--	---	--

В графе 4 приводятся планируемые формы текущего контроля: защита лабораторной работы (ЛБ), выполнение курсового проекта (КП), курсовой работы (КР), расчетно-графического задания (РГЗ), домашнего задания (ДЗ), написание реферата (Р), эссе (Э), коллоквиум (К), рубежный контроль (РК), тестирование (Т), интерактивный опрос (ИО), контрольная-тест (КТ) и т.д.

### 4.3 Лабораторные работы

№ ЛР	№ раздела	Наименование лабораторных работ	Кол-во часов
1	4	Дискретные и непрерывные цепи Маркова	4
2	5	Моделирование СМО	6
3	7	Линейные преобразования случайных процессов	6
		Итого:	16

### 4.4 Практические занятия (семинары)

№ занятия	№ раздела	Тема	Кол-во часов
1	1	Обзор: описание случайных процессов и их характеристик	2
2	2	Типы случайных процессов	4
3	8	Стохастические модели состояния	8
4	9	Марковские процессы с непрерывным множеством состояний	2
		Итого:	16

## 5 Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

### 5.1 Вопросы для текущего контроля успеваемости и зачетов

#### 5 семестр

#### Тема 1. Описание случайных процессов и их характеристик

1. Дайте определение сечения случайного процесса.
2. Дайте определение траектории (реализации) случайного процесса.
3. Раскройте понятие одномерной функции распределения, ..., N-мерной функции распределения векторного случайного процесса.
4. Раскройте понятие одномерной плотности, ..., N-мерной плотности распределения вероятностей векторного случайного процесса.
5. Какие процессы называют стохастически эквивалентными?
6. Дайте определение математического ожидания случайного процесса.
7. Дайте определение ковариационной матрицы и ковариационной функции векторного случайного процесса, корреляционной функции случайного процесса.

#### Тема 2. Типы случайных процессов

8. Дайте определение нормального (гауссовского) случайного процесса.
9. Выпишите ковариационную матрицу N-мерной плотности распределения гауссовского случайного процесса.
10. Дайте определение процесса с некоррелированными приращениями.
11. Дайте определение процесса с ортогональными приращениями.

12. Постройте ковариационную функцию процесса с ортогональными приращениями.
13. Дайте определение стационарного в узком (широком) смысле случайного процесса.
14. Укажите свойства стационарных в узком смысле случайных процессов.
15. Дайте определение винеровского процесса.
16. Перечислите свойства винеровского процесса.
17. Докажите нормальность винеровского процесса.
18. Дайте определение марковского процесса.
19. Укажите свойства марковского процесса.
20. Докажите, что винеровский процесс является марковским.
21. Дайте определение пуассоновского процесса.

### **Тема 3. Элементы стохастического анализа**

22. Определите виды сходимости (по вероятности, почти наверное, в среднем порядка "P", по распределению).
23. Дайте определение предела последовательности случайных процессов.
24. Дайте определение непрерывности случайного процесса. Условия непрерывности.
25. Дайте определение дифференцируемости случайного процесса. Условия дифференцируемости.
26. Дайте определение интегрируемости случайного процесса. Условия интегрируемости.

### **Тема 4. Дискретные и непрерывные цепи Маркова.**

27. Дайте определения цепи Маркова, однородной цепи Маркова.
28. Сформулируйте основные задачи для однородных цепей Маркова.
29. Перечислите основные характеристики цепей Маркова.
30. Приведите классификацию состояний цепей Маркова.
31. В чем заключается эргодическое свойство неприводимых цепей Маркова.
32. Приведите свойства и определите характеристики неприводимых цепей Маркова.
33. Приведите свойства и определите характеристики поглощающих цепей Маркова.
34. Определите понятия – плотность вероятности перехода из состояния в состояние, интенсивность.
35. Дайте определение однородного марковского процесса с непрерывным временем и дискретным множеством состояний.
36. Как строится система уравнений Колмогорова?
37. Сформулируйте задачу Коши для системы уравнений Колмогорова и укажите свойства ее решения.
38. Сформулируйте задачу для определения финальных вероятностей марковского случайного процесса с дискретным множеством состояний.
39. Дайте определение процесса гибели размножения.
40. Дайте определение циклического процесса.

### **Тема 5. Моделирование СМО**

41. Процесс массового обслуживания. Заявка (требования), поток заявок, очередь, дисциплина очереди, время ожидания, канал обслуживания.
42. Простейший поток заявок (стационарность потока, ординарность входного потока, отсутствие последствия). Свойства простейшего входного потока заявок. Распределение времени между двумя последовательными заявками. Время обслуживания, среднее время обслуживания, интенсивность обслуживания. Время ожидания, среднее время ожидания.
43. Размеченный граф состояний и построение математической модели СМО (системы уравнений Колмогорова). Стационарный режим функционирования СМО.
44. Одноканальная СМО с отказами и ее характеристики; абсолютная пропускная способность; относительная пропускная способность и т.д.

45. СМО с ожиданием. СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди. СМО без ограничения на длину очереди, но с ограничением на время ожидания. Замкнутые СМО.

### **Тема 6. Элементы спектральной теории стационарных случайных процессов**

46. Определение спектральной плотности стационарного непрерывного СП.
47. Свойства спектральной плотности.
48. Восстановление ковариационной функции непрерывного стационарного СП по спектральной плотности.
49. Спектральная плотность белого шума.
50. Определение спектральной плотности случайной последовательности (временного ряда).
51. Вычисление спектральной плотности случайной последовательности.
52. Восстановление ковариационной функции случайной стационарной последовательности по спектральной плотности.

### **Тема 7. Линейные преобразования случайных процессов**

53. Линейное преобразование случайного процесса (векторного, скалярного).
54. Свойства линейного преобразования.
55. Характеристики линейного преобразования СП.
56. Преобразование непрерывного случайного процесса оператором свертки.
57. Характеристики свертки непрерывного случайного процесса.
58. Преобразование дискретного случайного процесса оператором свертки.
59. Характеристики свертки дискретного случайного процесса.
60. Условия стационарности свертки непрерывного стационарного случайного процесса.
61. Условия стационарности свертки дискретного случайного процесса.
62. Спектральная плотность стационарной свертки непрерывного случайного процесса.
63. Спектральная плотность стационарной свертки дискретного случайного процесса.
64. Факторизация передаточной функции для непрерывного и дискретного СП.
65. Построение формирующего фильтра для непрерывного и дискретного СП.

### **Тема 8. Стохастические модели состояния**

66. Дайте определение стохастического интеграла в форме Ито; в форме Стратоновича.
67. Дайте определение стохастического дифференциала в форме Ито; в форме Стратоновича.
68. Приведите правило дифференцирования Ито.
69. Связь интегралов Ито и Стратоновича.
70. Характеристики интегралов Ито и Стратоновича.

### **Тема 9. Марковские процессы с непрерывным множеством состояний**

71. Уравнение Маркова-Смолуховского-Чепмена-Колмогорова.
72. 1-е и 2-е уравнение Колмогорова.
73. Стохастические модели состояния и уравнения Колмогорова.
74. Характерные задачи теории марковских СП.

### **5.2 Вопросы к экзамену**

1. Одномерные, двумерные...  $N$ -мерные законы распределения  $n$ -мерного случайного процесса (СП).

2. Математическое ожидание, ковариационная матрица, ковариационная функция, взаимная ковариационная функция  $n$ -мерного СП.
3. Стационарные в узком смысле  $n$ -мерные СП, свойства. Стационарные в широком смысле  $n$ -мерные СП.
4. СП с независимыми приращениями, СП с ортогональными приращениями, свойства.
5. Гауссовский  $n$ -мерный случайный процесс, формирование параметров законов распределения.
6. Винеровский процесс и его свойства.
7. Марковский процесс и его свойства.
8. Пуассоновский процесс и его свойства.
9. Дискретная цепь Маркова. Матрица переходных вероятностей, свойства. Вектор вероятностей состояний.
10. Матрица переходных вероятностей за  $t$ -тактов времени для неоднородных и однородных цепей Маркова.
11. Вероятность первого возвращения объекта в исходное состояние через  $t$ -тактов времени. Вероятность первого достижения состояния « $m$ » объектом, вышедшим из состояния « $l$ ».
12. Свойства поглощающих цепей Маркова.
13. Свойства цепей Маркова, содержащих множество невозвратных состояний и замкнутое поглощающее множество возвратных состояний.
14. Непрерывные цепи Маркова. Система уравнений Колмогорова.
15. Решение задачи Коши для системы уравнений Колмогорова в случае неоднородной цепи Маркова, свойства решения.
16. Решение задачи Коши для системы уравнений Колмогорова в случае однородной цепи Маркова, свойства решения.
17. Предельные вероятности состояний и их моделирование.
18. Модели марковских СМО.
19. Линейное преобразование случайного процесса и его характеристика.
20. Преобразование непрерывного случайного процесса оператором свертки, его характеристики, свойства, условия стационарности.
21. Преобразование дискретного случайного процесса оператором свертки, его характеристики, свойства, условия стационарности.
22. Формирующий фильтр (непрерывный случай).
23. Формирующий фильтр (дискретный случай).
24. Интеграл от винеровского процесса, по винеровскому процессу, свойства.
25. Стохастические интегралы Ито и Стратоновича, связь между ними, характеристиками.
26. Стохастические дифференциал в форме Ито и Стратоновича.
27. Правило дифференцирования Ито.

### 5.3 Примерный вариант контрольных тестовых заданий по темам

1.  $P_{\xi}(x^{(1)}x^{(2)}|t_1, t_2)$  - двумерная плотность распределения  $n$ -мерного случайного процесса,  $K_{\xi_i \xi_j}(t_1, t_2)$  ( $i, j$ -ая компонента ковариационной функции  $K_{\xi}(t_1, t_2)$ ) приведена в:

$$\text{а) } K_{\xi_i \xi_j}(t_1, t_2) = \int \dots \int \underbrace{(x_i^{(1)} - m_{\xi_i}(t_1))(x_j^{(2)} - m_{\xi_j}(t_2))}_{2n} P_{\xi}(x^{(1)}, x^{(2)}|t_1, t_2) dx^{(1)} dx^{(2)};$$

$$\text{б) } K_{\xi_i \xi_j}(t_1, t_2) = \int \dots \int (x^{(1)} - m_{\xi}(t_1))(x^{(2)} - m_{\xi}(t_2))^T P_{\xi}(x^{(1)}, x^{(2)}|t_1, t_2) dx^{(1)} dx^{(2)};$$

$$в) K_{\xi_i \xi_j}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i^{(1)} - m_{\xi_i}(t_1))(x_j^{(2)} - m_{\xi_j}(t_2)) P_{\xi}(x_i^{(1)} | t_1) P_{\xi}(x_j^{(2)} | t_2) dx^{(1)} dx^{(2)};$$

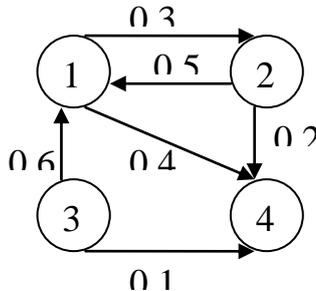
$$г) K_{\xi_i \xi_j}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_i^{(1)} - m_{\xi_i}(t_1))(x_j^{(2)} - m_{\xi_j}(t_2)) P_{\xi_i \xi_j}(x_i^{(1)}, x_j^{(2)} | t_1, t_2) dx_i^{(1)} dx_j^{(2)}.$$

2. Одномерные, двумерные... $N$ -мерные законы распределения  $n$ -мерного случайного процесса не меняют вида при переходе от моментов времени  $t_1, t_2 \dots t_N$  к моментам времени

$t_1 + \tau, t_2 + \tau \dots t_N + \tau, \tau : t_i + \tau \in T, i = \overline{1, N}$ . Такой случайный процесс является:

- а) процессом с независимыми приращениями;
- б) процессом с ортогональными приращениями;
- в) стационарным в узком смысле;
- г) стационарным в широком смысле.

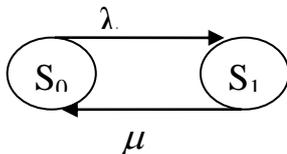
3. Цепь Маркова с дискретным множеством состояний и дискретным временем задана в виде графа:



К какому виду цепей Маркова она относится:

- а) поглощающая
- б) эргодическая
- в) периодическая
- г) приводимая

4. Размеченный граф состояний непрерывной цепи Маркова имеет вид



Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний приведена в:

$$а) \begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \\ P_1'(t) = \lambda P_0(t) - \mu P_1(t) \end{cases}; \quad б) \begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \lambda P_1(t) \\ P_1'(t) = \mu P_0(t) - \mu P_1(t) \end{cases};$$

$$в) \begin{cases} P_0'(t) = \mu P_1(t) \\ P_1'(t) = \lambda P_0(t) \end{cases}; \quad г) \begin{cases} P_0'(t) = \lambda P_0(t) \\ P_1'(t) = \mu P_1(t) \end{cases}.$$

5. Марковская система массового обслуживания, характеризуемая матрицей

$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$ , имеет стационарный режим функционирования, т.к.:

а) собственные числа  $\alpha_t$  матрицы  $\Lambda^T$ :

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = \lambda + \mu > 0$$

б) собственные числа  $\alpha_t$  матрицы  $\Lambda^T$ :

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = -(\lambda + \mu) < 0$$

в) собственные числа  $\alpha_t$  матрицы  $\Lambda^T$ :

$$\alpha_1 = -(\lambda + \mu) < 0$$

$$\alpha_2 = -\lambda < 0$$

г) собственные числа  $\alpha_t$  матрицы  $\Lambda^T$ :

$$\alpha_1 = -(\lambda + \mu) < 0$$

$$\alpha_2 = -\mu < 0$$

6. Ковариационная функция белого шума  $K_\xi(\tau) = 2\pi C \delta(\tau)$ , где  $\delta(\tau)$ - дельта функция Дирака, тогда спектральная плотность  $S_\xi(w)$  приведена в:

а)  $S_\xi(w) = C\sqrt{2\pi} \cos w$ ;                      б)  $S_\xi(w) = \frac{C}{\sqrt{1+w^2}}$ ;

в)  $S_\xi(w) = C\sqrt{2\pi}$ ;                                      г)  $S_\xi(w)$ - не существует.

7. Ковариационная функция  $K_\xi[m] = \sigma^2 e^{-\alpha|m|}$ . Тогда спектральная плотность  $S_\xi(z)$  приведена в:

а)  $S_\xi(z) = \frac{\sigma^2 z}{z - e^{-\alpha}}$ ;                                      б)  $S_\xi(z) = \frac{\sigma^2 z^{-1}}{z^{-1} - e^{-\alpha}}$ ;

в)  $S_\xi(z) = \frac{\sigma^2}{(z - e^{-\alpha})(z^{-1} - e^{-\alpha})}$ ;                                      г)  $S_\xi(z) = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\alpha})}{(z - e^{-\alpha})(z^{-1} - e^{-\alpha})}$ .

8. Решение стохастического дифференциального уравнения

$$a_0 \eta(t_1 \omega) + a_1 \eta'(t_1 \omega) + \dots + a_n \eta^{(n)}(t_1 \omega) = b_0 \xi(t_1 \omega) + b_1 \xi'(t_1 \omega) + \dots + b_m \xi^{(m)}(t_1 \omega)$$

$$\eta(0, \omega) = \eta'(0, \omega) = \dots \eta^{n-1}(0, \omega) = \xi(0, \omega) = \dots \xi^{(n-1)}(0, \omega) = 0$$

имеет вид  $\eta(t, \omega) = \int_0^t k(u) \xi(t-u) du$ , где  $k(x)$  - известная функция, тогда  $K_{\eta\xi}(t_1, t_2)$  при-

ведено:

$$\text{а) } K_{\eta\xi}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} k(u) K_{\xi}(t_1, t_2 - u) du;$$

$$\text{б) } K_{\eta\xi}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} k(u) K_{\xi}(t_1 - u, t_2) du;$$

$$\text{в) } K_{\eta\xi}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} k(u) K_{\xi}(u, t_2 - u) du;$$

$$\text{г) } K_{\eta\xi}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} k(u) K_{\xi}(t_1 - u, t_2 - u) du$$

9. Известно, что  $dx(t, \omega) = dw(t, \omega)$ , где  $w(t, \omega)$  - винеровский процесс  $f(x, t) = e^{x-0,5t}$ .

Тогда выражение для  $df(w, t)$  приведено в:

$$\text{а) } df(w, t) = wdt + t dw;$$

$$\text{б) } df(w, t) = f(w, t) dw;$$

$$\text{в) } df(w, t) = w dw;$$

$$\text{г) } df(w, t) = w t dw.$$

10. Стохастическая модель состояния в форме Ито

$$dx(t, \omega) = -(\alpha - 0,5\sigma^2)x(t, \omega)dt + \gamma x(t, \omega)dw(t, \omega), \text{ где } \alpha, \gamma - \text{ константы, } w(t, \omega) - \text{ вине-}$$

ровский процесс с коэффициентом диффузии равным  $\sigma^2 = 1$ . Тогда  $Mx(t, \omega)$  приведено в:

$$\text{а) } m(t) = -(\alpha - 0,5\gamma^2)t;$$

$$\text{б) } m(t) = \exp(-0,5\gamma^2 t);$$

$$\text{в) } m(t) = \exp(-(\alpha - 0,5\gamma^2)t);$$

$$\text{г) } m(t) = \gamma^2 t \exp(-2(\alpha - \gamma^2)t).$$

## 6 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

### 6.1 Основная литература

1. Волков, И.К. Случайные процессы: учеб. для вузов / И.К. Волков, С.М. Зуев, Г.М. Цветкова; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. - 3-е изд., испр. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003, 2006. - 448 с.

2. Соколов, Г. А. Теория случайных процессов для экономистов [Электронный ресурс]: учебное пособие / Г. А. Соколов. - М.: Физматлит, 2010. - 208 с. - ISBN: 978-5-9221-1100-3 Режим доступа: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_view&book\\_id=69334](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=69334)

3. Черемных, Ю. Н. Количественные методы в экономических исследованиях [Электронный ресурс]: учебник / Ю. Н. Черемных, А. А. Любкин, Я. А. Рощина, В. Ф. Пахомов, Б. Э. Слепак. - М.: Юнити-Дана, 2015. - 687 с. - ISBN: 978-5-238-02331-1 Режим доступа: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_view&book\\_id=119441](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=119441)

4. Самусевич, Г. А. Основы теории массового обслуживания практикум [Электронный ресурс]: учебная литература для ВУЗов / Г. А. Самусевич. - Екатеринбург: Издательство Уральского

университета, 2014. – 45 с. - ISBN: 978-5-321-02374-7 Режим доступа: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_view&book\\_id=276464](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=276464)

5. Булинский, А. В. Теория случайных процессов [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. – М.: Физматлит, 2005. – 403 с. – ISBN: 978-5-9221-0335-0 Режим доступа: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_view\\_red&book\\_id=68121](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=68121)

6. Миллер, Б. М. Теория случайных процессов в примерах и задачах: [Электронный ресурс]: учебное пособие / Б. М. Миллер, А. Р. Панков. – М.: Физматлит, 2007. – 318 с. – ISBN: 978-5-9221-0206-3 Режим доступа: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_view\\_red&book\\_id=76563](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=76563)

## 6.2 Дополнительная литература

1. Грачева, М.В. Моделирование экономических процессов: экономистов [Электронный ресурс]: учебное пособие / М.В. Грачева, Ю.Н. Черемных, Е.А. Туманова. – М.: Юнити-Дана, 2015. – 544 с. - ISBN: 978-5-238-02329-8 Режим доступа: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_view&book\\_id=119452](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=119452)

2. Свешников, А.А. Прикладные методы теории случайных функций: учеб. пособие для вузов / А.А. Свешников. - 3-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2011. - 464 с.

3. Булинский, А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. - М. : Физматлит : ЛБЗ, 2003. - 400 с.

4. Булинский, А. В. Теория случайных процессов [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. – М.: Физматлит, 2005. – с. 403 - ISBN: 978-5-9221-0335-0 Режим доступа: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_view&book\\_id=68121](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view&book_id=68121)

5. Миллер, Б.М. Теория случайных процессов в примерах и задачах / Б.М. Миллер, А.Р. Панков; под ред. А.И. Кибзуна. - М. : Физматлит, 2002. - 320 с.

6. Вентцель, Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения: учеб. пособие для вузов / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - 4-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2003, 2007. - 480 с.

7. Лабскер, Л.Г. Вероятностное моделирование в финансово-экономической области /Л.Г. Лабскер – М.: Изд-во "Экзамен", 2002. – 192с.

8. Чураков, Е.П. Математические методы обработки экспериментальных данных в экономике: учеб. пособие / Е.П. Чураков. - М.: Финансы и статистика, 2004

9. Кузнецов, Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения: монография / Д.Ф. Кузнецов. - СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2007. - 778 с.

10. Соловьев, В.И. Стохастические методы в экономике и финансах / В.И. Соловьев. - М.: ГУУ, 2000. - 50с.

11. Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики / А.Н. Ширяев. Т.1, 2. – М.: Фазис, 1998.

12. Дж. Кемени Конечные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл – М.: Наука, 1979. - 270с.

13. Пугачев, В.С. Теория стохастических систем: учебное пособие /В.С. Пугачев, И.Н. Синицын. М.: ЛОГОС, 2004.

14. Охорзин, В.А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad: учеб. пособие / Охорзин В.А. – М.: 2005. – 144с.

## 6.3 Периодические издания

1. Применение математических методов в экономических исследованиях и планировании : реферативный журнал: вып. свод. тома. - М.: ВИНиТИ

2. Обзорные прикладной и промышленной математики: журнал

3. Математическое моделирование: журнал. – М.:АРСМИ

4. Теория вероятностей и ее применение: журнал.

## 6.4 Интернет-ресурсы

<http://bourabai.ru/cm/smo.htm> - Моделирование систем массового обслуживания (курс лекций к.т.н. К.А. Хайдарова)

[http://sernam.ru/book\\_tp.php](http://sernam.ru/book_tp.php) - научная библиотека. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов.

<http://ermak.cs.nstu.ru/mmsa/main/Proba.htm> Хачатурова С.М. Электронный учебник по дисциплине "Математические модели системного анализа" (<http://ermak.cs.nstu.ru/mmsa/glava5/glava5.htm> - Раздел 5. Основы теории систем массового обслуживания)

<http://modelirovanie2009.narod.ru/> - лекции по моделированию систем

## 6.5 Программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы современных информационных технологий

### Лицензионное ПО

#### Пакет настольных приложений

Microsoft Office (Word, Excel, PowerPoint)

#### ПО для решения широкого спектра научных и прикладных задач:

MathCad 14 – математический пакет (лицензия ОГУ, выделена на каф. ММиМЭ на 10 ПК)

MathWorks MATLAB R2013b + Fuzzy Logic Toolbox + Wavelet Toolbox

#### Средства для разработки и проектирования

Microsoft Visual Studio

Rad Studio 5 (конкурентная лицензия на факультет на 20 рабочих станций)

### Программные средства, разработанные на кафедре ММиМЭ, зарегистрированные в университетском фонде электронных ресурсов (УФЭР):

Программный комплекс решения задач "Автоматизированный программный комплекс для исследования цепей Маркова и систем массового обслуживания"

Авторы: Пономарев Дмитрий Викторович, Константинов Виталий Николаевич, Яркова Ольга Николаевна

Информационная карточка в УФЭР:

[http://ufer.osu.ru/index.php?option=com\\_uferdbsearch&view=uferdbsearch&action=details&ufer\\_id=216](http://ufer.osu.ru/index.php?option=com_uferdbsearch&view=uferdbsearch&action=details&ufer_id=216)

Электронный курс лекций "Случайные процессы"

Авторы: Реннер Александр Георгиевич, Яркова Ольга Николаевна, Стебунова Ольга Ивановна

Информационная карточка в УФЭР:  
[http://ufer.osu.ru/index.php?option=com\\_uferdbsearch&view=uferdbsearch&action=details&ufer\\_id=586](http://ufer.osu.ru/index.php?option=com_uferdbsearch&view=uferdbsearch&action=details&ufer_id=586)

## 7 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения лабораторного практикума предназначен компьютерный класс (ауд. 6204).

Для проведения лекционных занятий требуется наличие мультимедийного проектора.

### *К рабочей программе прилагаются:*

1. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине;
2. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

*Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля) могут быть представлены в виде изданных печатным и (или) электронным способом методических разработок со ссылкой на адрес электронного ресурса, а при отсутствии таковых, в виде рекомендаций обучающимся по изучению разделов и тем дисциплины (модуля) с постраничным указанием глав, разделов, параграфов, задач, заданий, тестов и т.п. из рекомендованного списка литературы.*

