

Минобрнауки России

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

ДИСЦИПЛИНЫ

«А.1.В.ОД.2 Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Уровень высшего образования

ПОДГОТОВКА КАДРОВ ВЫСШЕЙ КВАЛИФИКАЦИИ

Направление подготовки

01.06.01 Математика и механика
(код и наименование направления подготовки)

Математическая логика, алгебра и теория чисел
(наименование направленности (профиля) образовательной программы)

Квалификация

Исследователь. Преподаватель-исследователь

Форма обучения

Очная

Год набора 2019

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры

Кафедра алгебры и дискретной математики

наименование кафедры

протокол № 6 от "17" января 2019 г.

Заведующий кафедрой

Кафедра алгебры и дискретной математики

наименование кафедры

подпись

О.А. Пихтилькова

расшифровка подписи

О.А. Пихтилькова

Исполнители:

зав. каф. А.И. Пихтильков

должность

подпись

О.А. Пихтилькова

расшифровка подписи

должность

подпись

расшифровка подписи

СОГЛАСОВАНО:

Руководитель направленности (профиля)

Математическая логика, алгебра и теория чисел

наименование

личная подпись

расшифровка подписи

О.А. Пихтилькова

Заведующий отделом комплектования научной библиотеки

личная подпись

Н.Н. Грицай

расшифровка подписи

Уполномоченный по качеству факультета

личная подпись

расшифровка подписи

М.В. Крюков

№ регистрации _____

© Пихтилькова О.А., 2019

© ОГУ, 2019

1 Цели и задачи освоения дисциплины

Цель (цели) освоения дисциплины:

Сформировать у аспирантов математическую культуру и подготовить их к изучению литературы по различным направлениям математической логики, алгебры и теории чисел. Рассмотреть основные алгебраические системы, а также основные факты теории алгебр Ли. Сформировать у аспирантов прочные знания по основам теории алгебраических систем и выработать навыки решения исследовательских задач.

Задачи:

- ознакомить аспирантов с основными понятиями и методами в области групп, колец и алгебр Ли;
- ознакомить аспирантов с открытыми проблемами в математической логике, алгебре и теории чисел.
- выработать у аспирантов навыки решения проблем данной предметной области.

2 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к обязательным дисциплинам (модулям) вариативной части блока 1 «Дисциплины (модули)»

Пререквизиты дисциплины: *А.1.Б.1 Иностранный язык, А.1.Б.2 История и философия науки, А.1.В.ОД.1 Профессиональная педагогика*

Постреквизиты дисциплины: *А.3.В.1 Научно-исследовательская деятельность, А.3.В.2 Подготовка научно-квалификационной работы (диссертации) на соискание ученой степени кандидата наук*

3 Требования к результатам обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих результатов обучения

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
Знать: методы критического анализа современных научных достижений; методы оценки современных научных достижений; методы генерирования новых идей при решении исследовательских и практических задач в профессиональной деятельности, в том числе в междисциплинарных областях. Уметь: анализировать альтернативные варианты решения исследовательских задач и оценивать потенциальные выигрыши/проигрыши реализации этих вариантов; при решении исследовательских и практических задач генерировать новые идеи, поддающиеся разработке, исходя из наличных ресурсов и ограничений; анализировать альтернативные варианты решения практических задач. Владеть: навыками анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских задач, в том числе в междисциплинарных областях; технологиями оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях; навыками анализа методологических проблем, возникающих при	УК-1 способностью к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
решении практических задач; навыками критического анализа и оценки современных научных достижений и результатов деятельности по решению исследовательских и практических задач.	
<u>Знать:</u> особенности научного познания, основные методологические и мировоззренческие проблемы, возникающие в современной науке; основные концепции современной философии науки, основные стадии эволюции науки, функции и основания научной картины мира; методы научно-исследовательской деятельности, в том числе статистические методы и подходы к проведению статистических расчетов. <u>Уметь:</u> использовать положения и категории философии науки для анализа и оценивания различных фактов и явлений; критически оценивать поступающую информацию, вне зависимости от источника; избегать автоматического применения стандартных приемов решения задач; использовать методы научного познания с учетом их возможностей в решении познавательных и исследовательских задач, проводить статистические расчеты, используя инновационные методы. <u>Владеть:</u> навыками анализа основных мировоззренческих и методологических проблем, в т.ч. междисциплинарного характера, возникающих в науке на современном этапе ее развития; навыками выявления и описания закономерностей развития профессиональной деятельности, моделирования и прогнозирования последствий выявленных закономерностей; культурой мышления, приемами ведения дискуссии, способами аргументированного и обоснованного выражения своей позиции по проблемам профессиональной деятельности.	УК-2 способностью проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области истории и философии науки
<u>Знать:</u> особенности коллективной научной деятельности, представления и использования результатов коллективной научной работы в публикациях и научной квалификационной работе; специфику и этические нормы взаимодействия с членами российских и международных исследовательских групп при осуществлении научно-образовательной деятельности. <u>Уметь:</u> осуществлять личностный выбор области деятельности и ее планирование в процессе работы в российских и международных исследовательских коллективах, оценивать последствия принятого решения и нести за него ответственность; анализировать методологические и организационные проблемы, возникающие при работе по решению научных и научно-образовательных задач в российских или международных исследовательских коллективах. <u>Владеть:</u> технологиями оценки результатов коллективной деятельности по решению научных и научно-образовательных задач; различными типами коммуникаций (в том числе на иностранном языке) при осуществлении работы в российских и международных коллективах по решению научных и научно-образовательных задач.	УК-3 готовностью участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач
<u>Знать:</u> знать категории и способы научной коммуникации на государственном и иностранном языках; грамматические, лексические и стилистические способы презентации результатов научной деятельности в устной и письменной форме на	УК-4 готовностью использовать современные методы и технологии научной коммуникации на государственном и

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
государственном и иностранном языках. Уметь: применять знания о научной коммуникации на государственном и иностранном языках в практике делового профессионально-ориентированного общения; применять коммуникативные лексико-грамматические модели в научном общении на государственном и иностранном языках. Владеть: навыками и опытом аннотирования и реферирования научных текстов на государственном и иностранном языках; методами и технологиями профессионально-ориентированной и научной коммуникации на государственном и иностранном языках; нормами и этикой научной	иностранном языках
Знать: этические принципы научно-исследовательской и преподавательской деятельности. Уметь: следовать основным нормам, принятым в научном общении, с учетом международного опыта; осуществлять личностный выбор в морально-ценностных ситуациях, возникающих в профессиональной сфере деятельности. Владеть: рефлексивным методами, технологиями и техниками анализа проблем профессиональной и научной этики.	УК-5 способностью планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития
Знать: содержание ключевых понятий и определений, используемых в теории и практике применения информационных технологий в науке и образовании, информационные ресурсы и базы данных по научно-исследовательской теме; принципы построения научного исследования в соответствующей области наук, принципы использования информационных технологий при решении задач в профессиональной деятельности, науке и образовании. Уметь: применять прикладное программное обеспечение для решения задач в профессиональной деятельности, науке и образовании, самостоятельно расширять и углублять знания в области информационных технологий; обосновать актуальность, новизну, теоретическую и практическую значимость собственного исследования, определять методологию исследования, уметь делать выводы из проведенного исследования и определять перспективы дальнейшей работы, анализировать собранный эмпирический материал и делать достоверные выводы, отстаивать собственную научную концепцию в дискуссии, выступать оппонентом и рецензентом по научным работам. Владеть: навыками пользования прикладного программного обеспечения для решения задач в профессиональной деятельности, науке и образовании, навыками использования Интернет-технологий; навыками компьютерной обработки вычислительных задач; навыками работы с источниками научной литературы, владеть логикой научного исследования, научным стилем изложения собственной концепции.	ОПК-1 способностью самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
Знать: нормативно-правовые основы преподавательской деятельности в системе высшего образования; требования к квалификационным работам бакалавров, специалистов, магистров.	ОПК-2 готовностью к преподавательской деятельности по основным образовательным

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
Уметь: осуществлять отбор и использовать оптимальные методы преподавания; участвовать в курировании выполнения квалификационных работ бакалавров, специалистов, магистров. Владеть: технологией проектирования научно-методического обеспечения образовательного процесса на уровне высшего образования (бакалавриата и магистратуры); методами преподавания учебных предметов, курсов, дисциплин (модулей) по программам бакалавриата, специалитета, магистратуры.осуществлять отбор и представление материала, характеризующего достижения науки с учетом специфики направления подготовки. Владеть: методами и технологиями межличностной коммуникации, навыками публичной речи, навыками руководства командной деятельности.	программам высшего образования
Знать: – понятия аксиоматической теории, правила вывода, основные законы математической логики; – алгебраической системы, алгебры, модели; – подалгебры, критерий подалгебры, идеала, фактор-алгебры; – понятие тождества, многообразия алгебр и вербального идеала; – понятие свободной алгебры и свободной алгебры многообразия; – понятия гомоморфизма, эндоморфизма и автоморфизма групп; – понятие декартова произведения алгебр, теорему Биркгофа.; – понятия нильпотентной, разрешимой и сверхразрешимой групп, их основные свойства; – понятия модулярной, дистрибутивной и булевой решеток; – основные результаты теории алгебр Ли; – решетки подгрупп конечной группы; – теорему Стоуна о булевых алгебрах; – квадратичный закон взаимности; – первообразные корни и индексы; – неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$; – дзета-функцию Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел; – характеры и L-функции. – теорему Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии. – понятия аксиоматической теории, правила вывода, основные законы математической Уметь: – проверять является ли множество с заданными на нем операциями полугруппой, группой, кольцом, полем, алгеброй над полем; – применять критерий подалгебры; – уметь находить подгруппы, подкольца, подполя; – формулировать и доказывать основные результаты теории алгебр Ли; – строить диаграммы решеток подгрупп, нормальных подгрупп; – приводить примеры многообразий групп; – проверять, является ли подгруппа нормальной; – строить фактор-группу по некоторой нормальной подгруппе; – находить центр конечной группы; – находить показатель числа по простому модулю и строить группы Шмидта; – находить первообразные корни по простому модулю;	ПК*-1 готовностью к исследованию и получению новых результатов в области теории алгебраических структур (полугруппы, группы, кольца, поля, модули, алгебры Ли и т.д.)

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
– применять – квадратичный закон взаимности; Владеть: – методами общей алгебры; – методами структурной теории групп и их классов, структурной теории алгебр Ли; – методами теории решеток; – методами классической теории чисел.	

4 Структура и содержание дисциплины

4.1 Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц (216 академических часов).

Вид работы	Трудоемкость, академических часов		
	3 семестр	4 семестр	всего
Общая трудоёмкость	108	108	216
Контактная работа:	19	21	40
Лекции	8	8	16
Практические занятия (ПЗ)	10	10	20
Консультации		2	2
Индивидуальная работа и инновационные формы учебных занятий	0,75	0,7	1,45
Промежуточная аттестация (зачет, экзамен)	0,25	0,3	0,55
Самостоятельная работа: - выполнение индивидуального творческого задания (ИТЗ); - написание реферата (Р); -самостоятельное изучение разделов; - самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к практическим занятиям; подготовка к промежуточному контролю.)	89	87	176
Вид итогового контроля (зачет, экзамен, дифференцированный зачет)	диф. зач.	экзамен	

Разделы дисциплины, изучаемые в 3 семестре

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов				
		всего	аудиторная работа			внеауд. работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1	Математическая логика и теория алгоритмов		4	5		45
2	Алгебра		4	5		45
	Итого:	108	8	10		90

Разделы дисциплины, изучаемые в 4 семестре

№	Наименование разделов	Количество часов
---	-----------------------	------------------

раздела		всего	аудиторная работа			внеауд. работа
			Л	ПЗ	ЛР	
3	Теория чисел.		4	5		45
4	Кольца и алгебры Ли.		4	5		45
	Итого:	108	8	10		90
	Всего:	216	16	20		180

4.2 Содержание разделов дисциплины

Раздел 1. Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча.
2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы.
3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства ([21, §13]).
4. Классы P и NP. Полиномиальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема об NP-полноте задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ.
5. Логика высказываний. Представимость булевых функций формулами логики высказываний. Конъюнктивные и дизъюнктивные нормальные формы.
6. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость.
7. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предварённой нормальной форме.
8. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции.
9. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности.
10. Элементарные теории классов алгебраических систем. Категоричные в данной мощности теории. Теорема о полноте теории, не имеющей конечных моделей и категоричной в бесконечной мощности.
11. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка.
12. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике (без доказательства).
13. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости арифметической истинности в арифметике.
14. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов.
15. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора.

Раздел 2. Алгебра

1. Теоремы Силова.
2. Простота группы A_n , $n \geq 5$ и SO_3 .
3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.
4. Свободные группы и определяющие соотношения.
5. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа.
6. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы.
7. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности.
8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса.
9. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.
11. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.
12. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.

13. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

Раздел 3. Теория чисел

1. Квадратичный закон взаимности .
2. Первообразные корни и индексы.
3. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$.
4. Дзета-функция Римана. Асимптотический закон распределения простых чисел..
5. Характеры и L-функции. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии..
6. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. Полные тригонометрические суммы и число решений сравнений.
7. Критерий Вейля равномерного распределения. Теорема Вейля о последовательности значений многочлена.
8. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм..
9. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами.
10. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел.
11. Трансцендентность чисел e и π .

Раздел 4. Кольца и алгебры Ли

1. Модули. Неприводимые модули. Лемма Шура.
2. Радикал Джекобсона.
3. Первичный радикал ассоциативного кольца.
4. Артиновы кольца. Теорема Веддербёрна-Артина.
5. Теорема плотности Джекобсона.
6. PI-алгебры. Теорема Капланского .
7. Теорема Познера о первичных PI-алгебрах .
8. Алгебры Ли. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли. Теорема Ли .
9. Полупростые конечномерные алгебры Ли. Теорема Леви-Мальцева.
11. Универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли.
12. Свободная алгебра Ли. Базисы свободной алгебры Ли.
13. Подалгебры свободных алгебр Ли.
14. Специальные алгебры Ли. Доказать, что присоединенная алгебра специальной алгебры Ли является PI-алгеброй.
15. Первичный радикал обобщенно специальных алгебр Ли .
16. Теорема Ю.А. Бахтурина о конечно-порожденных почти разрешимых алгебрах Ли над полем характеристики нуль.

4.3 Практические занятия (семинары)

№ занятия	№ раздела	Тема	Кол-во часов
1	1	Основные вопросы математической логики и теории алгоритмов.	5
2	2	Идеалы. Алгебры. Радикал кольца. Нетеровы кольца. Артиновы кольца.	5
3	3	Основные вопросы теории чисел	5
4	4	Радикал алгебры Ли. Специальные алгебры Ли.	5
		Итого:	20

5 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

5.1 Основная литература

1. Винберг, Э. Б. Курс алгебры: учебник [Электронный ресурс] / Винберг Э. Б. – Москва: МЦНМО, 2011. – 591 с. – ISBN 978-5-94057-685-3. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63299>

2. Евсюков, В. Н. Методика работы над кандидатской диссертацией [Текст]: практ. пособие для аспирантов и магистрантов / В. Н. Евсюков; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. агентство по образованию, Гос. образоват. учреждение высш. проф. образования «Оренбург. гос. ун-т». – 5-е изд., доп. – Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2010. – 532 с.

3. Кострикин, А.И. Введение в алгебру: учебник [Электронный ресурс] / А.И. Кострикин. – Москва: МЦНМО, 2009. – Ч. 3. Основные структуры алгебры. – 272 с. – ISBN 978-5-94057-455-2 – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

5.2 Дополнительная литература

1. Бахтурин, Ю. А. Основные структуры современной алгебры / Ю. А. Бахтурин. – М.: Наука, 1990. – 320 с.

2. Каргаполов, М. И. Основы теории групп/ М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1977. – 240 с.

3. Новиков, А.М. Методология научного исследования [Электронный ресурс] / А.М. Новиков, Д.А. Новиков. – Москва: Либроком, 2010. – 284 с. – ISBN 978-5-397-00849-5. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82773>

4. Туганбаев, А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца/ А. А. Туганбаев. – М.: МЦНМО, 2009. – 472 с.

5. Пихтильков, С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли [Электронный ресурс] / С. А. Пихтильков; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. проф. образования «Оренбург. гос. ун-т», Каф. алгебры и мат. кибернетики. – 2-е изд., перераб. и доп. – Оренбург: ОГУ, 2013. – 171 с. – Режим доступа: http://artlib.osu.ru/web/books/work_all/4025_20140109.pdf, доступ для авторизованных пользователей.

5.3 Периодические издания

1. Вычислительные технологии: журнал. – М.: Агентство «Роспечать», 2016.

2. Прикладная математика и механика: журнал. – М.: Агентство «Роспечать», 2016.

5.4 Интернет-ресурсы

1. <http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm> – международный научно-образовательный сайт «Мир математических уравнений», который содержит обширную учебную физико-математическую библиотеку и предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики и других наук; все ресурсы сайта являются бесплатными для его пользователей).

2. <https://arxiv.org/> – крупнейший бесплатный архив электронных публикаций научных статей и их препринтов по физике, математике, астрономии, информатике и биологии.

3. «Высшая алгебра» [Электронный ресурс]: онлайн-курс на платформе <https://www.lektorium.tv/mooc> – «Лекториум» / Разработчик курса: Математическая лаборатория им. П.Л. Чебышева, режим доступа: <https://www.lektorium.tv/course/26552>

4. «Jacobian Conjecture» [Электронный ресурс]: онлайн-курс на платформе <https://www.lektorium.tv/mooc> – «Лекториум» / Разработчик курса: Математическая лаборатория им. П.Л. Чебышева, режим доступа: <https://www.lektorium.tv/course/23053>

5. «Алгебры картановского типа» [Электронный ресурс]: онлайн-курс на платформе <https://www.lektorium.tv/mooc> – «Лекториум» / Разработчик курса: Математическая лаборатория им. П.Л. Чебышева, режим доступа: <https://www.lektorium.tv/course/24298>

5.5 Программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы современных информационных технологий

1. Операционная система Microsoft Windows.
2. OpenOffice/LibreOffice - свободный офисный пакет программ, включающий в себя текстовый и табличный редакторы, редактор презентаций и другие офисные приложения.
3. Бесплатное средство просмотра файлов PDF Adobe Reader.
4. SCOPUS [Электронный ресурс]: реферативная база данных / компания Elsevier. – Режим доступа: <https://www.scopus.com/>, в локальной сети ОГУ.
5. Springer [Электронный ресурс]: база данных научных книг, журналов, справочных материалов / компания Springer Customer Service Center GmbH. – Режим доступа: <https://link.springer.com/>, в локальной сети ОГУ.
6. Общероссийский математический портал Math-Net.Ru [Электронный ресурс]: профессиональная база данных для математиков – Режим доступа: http://www.mathnet.ru/index.phtml?option_lang=rus

6 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Аудитории оснащены комплектами ученической мебели, техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещение для самостоятельной работы обучающихся оснащено компьютерной техникой, подключенной к сети «Интернет», и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ОГУ.

К рабочей программе прилагаются:

- Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине;
- Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.