Минобрнауки России

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

ДИСЦИПЛИНЫ

«Б.1.Б.10.3 Дифференциальные и интегральные уравнения и вариационное исчисление»

Уровень высшего образования

БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки
03.03.02 Физика
(код и наименование направления подготовки)

Медицинская физика
(наименование направленности (профиля) образовательной программы)

Тип образовательной программы
Программа академического бакалавриата

Квалификация
Бакалавр

Форма обучения
Очная

Год набора 2019

1323001

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры

Кафедра прикладной математики
наименование кафедры

протокол № 6 от "6" февраля 2019 г.

Заведующий кафедрой
Кафедра прикладной математики _____ И.П. Болодурина
наименование кафедры *подпись* *расшифровка подписи*

Исполнители:
Старший преподаватель _____ И.Г. Руцкова
должность *подпись* *расшифровка подписи*

_____
должность *подпись* *расшифровка подписи*

СОГЛАСОВАНО:
Председатель методической комиссии по направлению подготовки
03.03.02 Физика _____ Воронежский В.А.
код наименование *личная подпись* *расшифровка подписи*

Заведующий отделом комплектования научной библиотеки
_____ Н.Н. Грицай
личная подпись *расшифровка подписи*

Уполномоченный по качеству факультета
_____ И.В. Крючкова
личная подпись *расшифровка подписи*

№ регистрации _____

© Руцкова И.Г., 2019
© ОГУ, 2019

1 Цели и задачи освоения дисциплины

Цель (цели) освоения дисциплины:

ознакомление студентов с основными результатами по теории обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, классическими методами их решения и исследования на устойчивость; основами теории интегральных уравнений и вариационного исчисления; формирование возможности использования полученных знаний при изучении последующих математических и специальных дисциплин, а также при построении математических моделей, исследуемых физических процессов и явлений.

Задачи:

- изучение основных понятий, определений, теорем и методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и систем, теории интегральных уравнений и вариационного исчисления;
- отработка навыков применения классических приемов и методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем и исследования на устойчивость;
- ознакомление с основными приемами решений интегральных уравнений и классических задач вариационного исчисления:
- формирование представлений о возможностях использования методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории интегральных уравнений и вариационного исчисления для решения задач теоретического и прикладного характера;
- приобретение практического опыта применения инструментов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории интегральных уравнений и вариационного исчисления при решении задач прикладного характера.

2 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к базовой части блока 1 «Дисциплины (модули)».

Пререквизиты дисциплины: *Б.1.Б.10.1 Математический анализ, Б.1.Б.10.5 Векторный и тензорный анализ*.

Постреквизиты дисциплины: *Б.1.Б.10.5 Векторный и тензорный анализ, Б.1.Б.19 Теоретическая механика и механика сплошных сред, Б.1.Б.20 Электродинамика, Б.1.Б.21 Термодинамика, статистическая физика и физическая кинетика, Б.1.Б.23 Квантовая механика*.

3 Требования к результатам обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих результатов обучения

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
Знать: физический смысл основных понятий и фактов дифференциальных и интегральных уравнений и вариационного исчисления и сферы их применения.	ОПК-1 способностью использовать в профессиональной деятельности базовые естественнонаучные знания, включая знания о предмете и объектах изучения, методах исследования, современных концепциях, достижениях и ограничениях естественных наук (прежде всего химии, биологии, экологии, наук о земле и человеке).

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
Знать: основные понятия, теоремы и методы дифференциальных и интегральных уравнений и вариационного исчисления и их приложения. **Уметь:** доказывать основные теоремы и решать классические задачи дифференциальных и интегральных уравнений и вариационного исчисления. **Владеть:** навыками использования инструментов и средств дифференциальных и интегральных уравнений и вариационного исчисления при моделировании и исследовании физических процессов и явлений (построение модели, интерпретация и оценка результатов).	ОПК-2 способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей.

4 Структура и содержание дисциплины

4.1 Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц (180 академических часов).

Вид работы	Трудоемкость, академических часов		
	3 семестр	4 семестр	всего
Общая трудоёмкость	**72**	**108**	**180**
Контактная работа:	**34**	**35,25**	**69,25**
Лекции (Л)	18	18	36
Практические занятия (ПЗ)	16	16	32
Консультации		1	1
Промежуточная аттестация (зачет, экзамен)		0,25	0,25
Самостоятельная работа: - самостоятельное изучение (доказательств теорем об устойчивости решений дифференциальных уравнений и систем, свойств функции Ляпунова, свойств интеграла Лапласа, применение экспоненциального преобразования Фурье, синус и косинус-преобразования Фурье); - самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий; - подготовка к практическим занятиям; - подготовка к рубежному контролю и т.п.).	**38**	**72,75**	**110,75**
Вид итогового контроля		**экзамен**	

Разделы дисциплины, изучаемые в 3 семестре

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов				
		всего	аудиторная работа			внеауд. работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1	Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений. Теоремы существования и единственности решений.	8	2	0	-	6
2	Основные классы уравнений первого порядка и сводящихся к ним.	13	3	6	-	6
3	Линейные уравнения *n* -го порядка.	17	5	4	-	6
4	Нормальные системы дифференциальных уравнений.	8	2	2	-	4
5	Системы линейных дифференциальных уравнений.	14	4	2	-	8
6	Теория устойчивости.	12	2	2	-	8
	Итого:	72	18	16		38

Разделы дисциплины, изучаемые в 4 семестре

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов				
		всего	аудиторная работа			внеауд. работа
			Л	ПЗ	ЛР	
7	Основные понятия теории интегральных уравнений.	6	2	0	-	4
8	Интегральные уравнения Вольтера.	28	4	4	-	20
9	Интегральные уравнения Фредгольма.	30	4	6	-	20
10	Применение интегральных преобразований для решения интегральных уравнений	14	2	2	-	10
11	Основные понятия и методы вариационного исчисления	30	6	4	-	20
	Итого:	108	18	16	-	74
	Всего:	180	36	32	-	112

4.2 Содержание разделов дисциплины

1 Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений. Теоремы существования и единственности решений

Основные понятия и определения: обыкновенные дифференциальные уравнения порядка *n*, решение, интегральная кривая; уравнение порядка *n*, разрешенное относительно старшей производной. Примеры возникновения дифференциальных уравнений. Задача Коши: постановка, геометрический смысл. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: поле направлений, изоклины, ломаные Эйлера, уравнение вида $y' = f(x)$: формула для общего решения и решения задачи Коши, достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x,y)$, понятие общего и частного решений для уравнения первого порядка, понятие общего и частного интегралов, уравнения, интегрируемые в квадратурах. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения вида: $y^{(n)} = f(x,y,y',...,y^{(n-1)}$. Понятие общего и частного решений для уравнения *n*-го порядка. Теорема о существовании и единственности для дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной. Особые решения.

2 Основные классы уравнений первого порядка и сводящихся к ним

Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными и приводящиеся к ним. Уравнения вида $y' = f(y/x)$ и приводящиеся к ним. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка, уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель. Интегрирование уравнений, неразрешенных относительно производной, путем введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро. Уравнения, допускающие понижение порядка.

3 Линейные уравнения *n* -го порядка

Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка: определение, теорема существования и единственности решения задачи Коши. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка: определение, простейшие свойства решений. Понятие линейной зависимости (независимости) системы функций на интервале. Определитель Вронского: определение, достаточные условия обратимости определителя в нуль на интервале. Достаточные условия линейной независимости системы функций на интервале. Критерий линейной независимости *n* решений линейного однородного уравнения *n*-го порядка. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка. Понятие о фундаментальной

системе решений линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка, теорема о её существовании. Теорема о свойстве частных решений линейного однородного дифференциального уравнения *n*-го порядка. Понижение порядка линейного однородного дифференциального уравнения. Определение линейного однородного дифференциального уравнения по фундаментальной системе решений. Формула Остроградского – Лиувиля. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения *n* -го порядка. Отыскание частных решений линейного неоднородного дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных. Метод суперпозиции. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами: определение, понятие характеристического уравнения, правило выбора фундаментальной системы решений. Вид общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от корней характеристического уравнения. Построение частных решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка методом неопределенных коэффициентов в случае правой части специального вида: $f(x)=e^{\alpha x}P_{n(}(x);\ \ f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right)$.

4 Нормальные системы дифференциальных уравнений

Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений: основные определения и понятия (решение, задача Коши). Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Понятие общего и частного решений для нормальной системы дифференциальных уравнений. Матричная форма записи нормальной системы дифференциальных уравнений. Физическая интерпретация. Интегрирование нормальных систем дифференциальных уравнений методом сведения к одному дифференциальному уравнению более высокого порядка. Решение нормальных систем дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций. Понятие о первом интеграле: определение, геометрический смысл. Симметрическая форма записи системы дифференциальных уравнений. Способы получения интегрируемых комбинаций. Зависимость решений дифференциальных уравнений и систем от начальных значений и параметров. Теорема о дифференцируемости решений по параметрам.

5 Системы линейных дифференциальных уравнений

Системы линейных дифференциальных уравнений: основные определения и понятия, теорема существования и единственности решения задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений, матричная форма записи. Однородная система линейных дифференциальных уравнений, определение, простейшие свойства решений. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов (вектор-функций). Определитель Вронского для системы векторов (вектор-функций). Его свойства (достаточные условия обратимости в нуль, достаточные условия линейной независимости системы функций). Критерий линейной независимости системы решений линейной однородной системы. Фундаментальная система решений, фундаментальная матрица, её свойства. Теорема о структуре общего решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений. Теорема о структуре общего решения линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений. Построение частных решений линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных и методом суперпозиции. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами: основные определения и понятия. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами: характеристическое уравнение, алгоритмы построения линейно независимых решений, в зависимости от свойств корней характеристического уравнения: (действительность, кратность). Алгоритмы построения частных решений линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов.

6 Теория устойчивости

Теория устойчивости: основные определения и понятия (устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость решения системы и системы.). Алгоритм сведения исследования на устойчивость решения системы к исследованию на устойчивость нулевого решения вспомогательной системы. Понятие о точке покоя системы дифференциальных уравнений. Определение устойчивости

по Ляпунову (асимптотической устойчивости) тривиального решения. Критерии устойчивости решений линейной неоднородной системы. Критерий устойчивости линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений. Критерий асимптотической устойчивости линейной неоднородной системы. Критерий устойчивости однородной линейной системы. Критерий асимптотической устойчивости однородной системы линейных уравнений. Критерий устойчивости линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) тривиального решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Исследование на устойчивость по первому приближению: основные понятия. Теорема Ляпунова. Исследование на устойчивость с помощью функций Ляпунова: основные понятия и определения. Теорема Ляпунова об устойчивости. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Теорема Ляпунова о неустойчивости. Теорема Четаева о неустойчивости.

7 Основные понятия теории интегральных уравнений

Интегральные уравнения: основные понятия и определения, классификация. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям. Постановка основных задач математической физики в виде интегральных уравнений. Линейные интегральные уравнения: определение, классификация (первого рода, второго рода, третьего рода); классификация в зависимости от свойств ядра (Фредгольма, Вольтерра, сингулярные). Представление линейных уравнений первого и второго рода на отрезке. Понятие о параметре линейного интегрального уравнения.

8 Интегральные уравнения Вольтерра

Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода: основные определения и понятия, связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра, решение методом сведения к дифференциальным уравнениям. Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Решение интегрального уравнения с помощью резольвенты. Решение интегральных уравнений Вольтера второго рода методом последовательных приближений. Интегральные уравнения Вольтерра 1-го рода: основные понятия и определения. Интегральные уравнения Абеля, обобщенное уравнение Абеля: определение, формула для построения решений. Решение интегральных уравнений Вольтера первого рода методом сведения к уравнениям второго рода.

9 Интегральные уравнения Фредгольма

Уравнение Фредгольма 2-го рода: основные определения и понятия, построение решений методом определителей Фредгольма. Итерированные ядра. Построение резольвенты с помощью итерированных ядер. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Характеристические числа и собственные функции. Задача Штурма-Лиувиля. Решение однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром. Неоднородные симметричные уравнения. Альтернатива Фредгольма. Функция Грина: определение, построение, применение к решению краевых задач, сведение к интегральным уравнениям краевых задач, содержащих параметр. Интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода: основные определения и понятия. Теорема Пикара. Метод производящих функций. Понятие о корректных и некорректных задачах.

10 Применение интегральных преобразований для решения интегральных уравнений

Применение экспоненциального преобразования Фурье, синус и косинус-преобразования Фурье, преобразования Лапласа.

11 Основные понятия и методы вариационного исчисления

Вариационное исчисление: основные определения и понятия. Понятие о корректно и некорректно поставленных задачах. Примеры и приложения. Вариация и её свойства. Функционалы и их свойства. Вариационные задачи в параметрической форме. Необходимые и достаточные условия экстремума функционала, задачи на условный экстремум, задачи с закрепленными границами и подвижной границей. Прямые методы в вариационных задачах. Понятие о приближенных методах решения вариационных задач.

4.3 Практические занятия (семинары)

№ занятия	№ раздела	Тема	Кол-во часов
1	2	Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными и сводящиеся к ним.	2
2	2	Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах.	2
3	2	Уравнения, допускающие понижение порядка Контрольная работа.	2
4	3	Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами: построение общих и частных решений. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка: построение решений методом вариации постоянных.	2
5	3	Построение частных решений линейных неоднородных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов и методом суперпозиций.	2
6	4	Интегрирование нормальных систем дифференциальных уравнений методом сведения к дифференциальному уравнению более высокого порядки и методом интегрируемых комбинаций.	2
7	5	Построение решений систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	2
8	6	Исследование систем дифференциальных уравнений на устойчивость.	2
9	8	Построение решений уравнений Вольтера второго рода методом сведения к дифференциальному уравнению. Построение решений уравнения Абеля.	2
10	8	Построение решений уравнений Вольтера второго рода с помощью резольвенты и методом последовательных приближений.	2
11	9	Построение решений уравнений Фредгольма второго рода методом определителей.	2
12	9	Построение решений уравнений Фредгольма второго рода с вырожденным ядром. Однородные уравнения Фредгольма второго рода: характеристические числа и собственные функции.	2
13	9	Уравнения Фредгольма первого рода.	2
14	10	Применение преобразования Фурье и Лапласа для решения интегральных уравнений	2
15	11	Использование необходимого условия экстремума при решении задач вариационного исчисления.	2
16	11	Использование достаточного условия экстремума при решении задач вариационного исчисления.	2
		Итого:	32

5 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

5.1 Основная литература

1 **Ванько, В. И.** Вариационное исчисление и оптимальное управление [Текст] : учебник для втузов / В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко.- 3-е изд., испр. - М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. - 488 с. - (Математика в техническом университете ; вып. XV). - Библиогр.: с. 475-479. - Предм. указ.: с. 480. - ISBN 5-7038-2484-2.

2 **Васильева, А. Б.** Интегральные уравнения [Текст] : учеб. для вузов / А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов .- 2-е изд. - М. : Физматлит, 2004. - 160 с. - (Курс высшей математики и математической физики / под ред. А. Н. Тихонова, В. А . Ильина, А. Г. Свешникова ; Вып. 7). - Библиогр.: с. 156-157. - ISBN 5-9221-0275-3.
3 **Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление [Текст] : в примерах и задачах** / А. Б. Васильева [и др.] . - М. : Физматлит, 2003. - 432 с. - (Курс высшей математики и математической физики / под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова ; вып. 10). - Библиогр.: с. 430-431. - ISBN 5-9221-0276-1.
4 **Эльсгольц, Л. Э.** Дифференциальные уравнения [Текст] : учебник / Л. Э. Эльсгольц .- 7-е изд. - М. : ЛКИ, 2008. - 309 с. - (Классический учебник МГУ). - Библиогр.: с. 306. - Предм. указ.: с. 307-309. - ISBN 978-5-382-00638-3.

5.2 Дополнительная литература

1 Болодурина, И. П. Исследование систем линейных дифференциальных уравнений [Текст] : учеб. пособие для студентов вузов / И. П. Болодурина . - Оренбург : ОГУ, 2004. - 98 с. - Библиогр.: с. 98. - ISBN 5-7410-0616-7.
2 Задачи и упражнения по математическому анализу [Текст] : для втузов / под ред. Б. П. Демидовича.- 10-е изд. - М. : Наука, 1978. - 479 с. : ил
3 Краснов, М. Л. Интегральные уравнения [Текст] : задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко.- 3-е изд., испр. - М. : УРСС, 2003. - 192 с. - (Вся высшая математика в задачах) - ISBN 5-354-00390-3.
4 Краснов, М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : задачи и упражнения с подробными решениями: учеб. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко .- 7-е изд. - М. : Либроком, 2009. - 253 с. - (Вся высшая математика в задачах). - Прил.: с. 248-250. - ISBN 978-5-397-00206-6.
5 Краснов, М. Л. Операционное исчисление. Теория устойчивости [Текст] : задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко.- 3-е изд., испр. и доп. - М. : УРСС, 2003. - 176 с. - (Вся высшая математика в задачах) - ISBN 5-354-00383-0.
6 Пастухов, Д. И. Операционное исчисление: теория и практика [Электронный ресурс]: учебное пособие для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика / Д. И. Пастухов, И. Г. Руцкова; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. образования "Оренбург. гос. ун-т". - Оренбург : ОГУ. – 2016. Режим доступа: http://artlib.osu.ru/web/books/metod_all/31686_20161004.pdf
7 Романко, В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. К. Романко.- 2-е изд. - М. : Лаборатория базовых знаний, 2001. - (Технический университет). - Библиогр.: с. 341-342. - ISBN 5-93208-097-3.

5.3 Периодические издания

Использование периодических изданий не предполагается.

5.4 Интернет-ресурсы

http://moodle.osu.ru/ - электронная система обучения ОГУ;
http://ibooks.ru/ - электронная библиотечная система;
http://biblioclub.ru/ - университетская библиотека ONLANE;
http://e.lanbook.com/ - электронная библиотечная система издательства «Лань»;
http://rucont.ru/ - электронная библиотека РУКОНТ;
http://lib.mexmat.ru/- электронная библиотека механико-математического факультета МГУ;
http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics.htm - учебно-образовательная физико-математическая библиотека;

www.exponenta.ru – Internet-класс по высшей математике: вся математика, от пределов и производных до методов оптимизации, уравнений математической физики и проверки статистических гипотез в среде самых популярных математических пакетов;
http://www.wolframalpha.com/ - сайт, где можно проверить решение огромного количества задач.

5.5 Программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы современных информационных технологий

1. Операционная система Microsoft Windows
2. Пакет настольных приложений Microsoft Office (Word, Excel, PowerPoint, OneNote, Outlook, Publisher, Access)
3. Большая российская энциклопедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://bigenc.ru/.

6 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, семинарского типа, для проведения групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Аудитории оснащены комплектами ученической мебели, техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещение для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой, подключенной к сети "Интернет", и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ОГУ.