

Минобрнауки России

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

ДИСЦИПЛИНЫ

«Б.1.Б.10.2 Линейная алгебра»

Уровень высшего образования

БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки

38.03.01 Экономика

(код и наименование направления подготовки)

Налоги и налогообложение

(наименование направленности (профиля) образовательной программы)

Тип образовательной программы

Программа академического бакалавриата

Квалификация

Бакалавр

Форма обучения

Заочная

Год набора 2020

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры

Кафедра прикладной математики

наименование кафедры

протокол № 4 от "21" февраля 2020 г.

Заведующий кафедрой

Кафедра прикладной математики

наименование кафедры



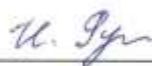
подпись

И.П. Болодурина

расшифровка подписи

Исполнители:

Старший преподаватель



И.Г. Руцкова

должность

подпись

расшифровка подписи

должность

подпись

расшифровка подписи

СОГЛАСОВАНО:

Председатель методической комиссии по направлению подготовки

38.03.01 Экономика

код наименование



личная подпись

расшифровка подписи

Заведующий отделом комплектования научной библиотеки

личная подпись

Н.Н. Грицай

расшифровка подписи



Уполномоченный по качеству факультета

личная подпись

И.В. Крючкова

расшифровка подписи

№ регистрации _____

1 Цели и задачи освоения дисциплины

Цель (цели) освоения дисциплины:

- подготовка специалистов, владеющих основными методами линейной алгебры, необходимыми при анализе и моделировании экономических процессов и явлений, при поиске оптимальных решений экономических задач и выборе наилучших способов реализации этих решений, при обработке и анализе результатов численных и научных экспериментов;
- создание базы для изучения дисциплин, использующих математические модели и методы в экономике.

Задачи:

- формирование теоретических знаний по линейной алгебре (основные понятия, определения, теоремы и факты) необходимых для изучения последующих математических и специальных дисциплин, решения экономических и прикладных задач, математического моделирования и исследования экономических процессов и явлений;
- ознакомление с историей возникновения и развития основных понятий и результатов дисциплины линейная алгебра, её роли и месте в системе наук;
- формирование представлений об основных инструментах линейной алгебры и их возможностях при осуществлении экономико-математического моделирования и исследовании экономических процессов и явлений;
- выработка практических навыков и умений по линейной алгебре необходимых для изучения последующих математических и специальных дисциплин, решения экономических и прикладных задач, математического моделирования и исследования экономических процессов и явлений;
- формирование математической культуры студентов, развитие логического и алгоритмического мышления и необходимой интуиции в вопросах приложения математики.

2 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к базовой части блока 1 «Дисциплины (модули)».

Пререквизиты дисциплины: *Отсутствуют.* Освоение базируется на школьном (общеобразовательном) курсе математики.

Постреквизиты дисциплины: *Б.1.Б.10.3 Теория вероятностей и математическая статистика*

3 Требования к результатам обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих результатов обучения

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
Знать: основные понятия (определения, факты, теоремы), методы и инструменты линейной алгебры, необходимые для решения экономических задач, моделирования и исследования экономических явлений и процессов. Уметь: решать классические задачи линейной алгебры; применять методы и инструменты линейной алгебры к решению математических и экономических задач, выбирать и использовать необходимые вычислительные методы и программные средства, а также таблицы и справочники.	ОПК-3 способностью выбирать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы

Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций	Формируемые компетенции
Владеть: навыками использования инструментов и средств линейной алгебры, при моделировании и исследовании экономических процессов и явлений (построение модели, выбор оптимального решения, интерпретация и оценка результатов).	

4 Структура и содержание дисциплины

4.1 Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы (144 академических часа).

Вид работы	Трудоемкость, академических часов	
	1 семестр	всего
Общая трудоёмкость	144	144
Контактная работа:	13,5	13,5
Лекции (Л)	6	6
Практические занятия (ПЗ)	6	6
Консультации	1	1
Промежуточная аттестация (зачет, экзамен)	0,5	0,5
Самостоятельная работа: - выполнение контрольной работы (КонтрР); - самостоятельное изучение разделов («Комплексные числа и многочлены», «Евклидовы пространства», «Ортогональные преобразования», «Прямая на плоскости», «Линейные, билинейные и квадратичные формы», «Кривые и поверхности второго порядка»); - самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий); - подготовка к практическим занятиям; - подготовка к экзамену.	130,5 +	130,5
Вид итогового контроля	экзамен	

Разделы дисциплины, изучаемые в 1 семестре

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов				
		всего	аудиторная работа			внеауд. работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1	Комплексные числа и многочлены	10	-	-	-	10
2	Матрицы и определители	22	1	1	-	20
3	Системы линейных уравнений	17	1	1	-	15
4	Линейные пространства и подпространства. Евклидовы пространства	9	1	1	-	7
5	Линейные операторы и линейные преобразования	12	1	1	-	10
6	Векторная алгебра	17	1	1	-	15
7	Прямая на плоскости, плоскость и прямая в пространстве	17	1	1	-	15
8	Кривые и поверхности второго порядка	20	-	-	-	20
9	Линейные, билинейные и квадратичные формы	20	-	-	-	20
	Итого:	144	6	6		132
	Всего:	144	6	6		132

4.2 Содержание разделов дисциплины

1 Комплексные числа и теория многочленов

Комплексные числа: основные определения, алгебраическая, тригонометрическая, показательная формы записи, операции над комплексными числами, геометрическая интерпретация. Многочлены: основные понятия и определения, делимость, свойства корней. Теорема Безу. Схема Горнера. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители. Разложение рациональных дробей на простейшие.

2 Матрицы и определители

Матрицы: основные определения, классификация, операции над матрицами (сложение, вычитание, умножение), элементарные преобразования матриц, приведение к треугольному виду, транспонирование матриц; свойства операции транспонирования. Коммутативные матрицы. Матрицы блочной структуры. Определители: общее определение, формулы для вычисления определителей 1,2,3. порядков, простейшие свойства определителей. Дополнительный минор и алгебраическое дополнение для элемента определителя, их свойства. Практические правила вычисления определителей $n \geq 4$. Определитель произведения матриц. Обратная матрица: определение, свойства, вывод формулы для вычисления. Минор порядка k для матрицы (определителя). Базисный минор и ранг матрицы. Различные теоремы о рангах. Подобные матрицы.

3 Системы линейных уравнений

Системы m линейных уравнений с n неизвестными: основные определения, классификация. Основные методы решения систем линейных уравнений: метод Гаусса решения системы m линейных уравнений с n неизвестными; правило Крамера решения системы n линейных уравнений с n неизвестными, применение обратных матриц к решению систем линейных уравнений; теорема Кронекера - Копелли о совместности неоднородной линейной системы m линейных уравнений с n неизвестными.

4 Линейные пространства и подпространства. Евклидовы пространства

Линейное пространство: определение, примеры линейных пространств. Понятие линейной зависимости независимости системы векторов, критерий линейной зависимости системы векторов в произвольном пространстве. Конечномерное линейное пространство: определение, базис, способ выбора базиса, координаты вектора. Критерий линейной независимости векторов в конечномерном пространстве. Формулы перехода от одного базиса к другому. Формулы для связи координат одного и того же вектора в двух базисах одного и того же линейного пространства. Линейное подпространство. Евклидово пространство: определение, неравенство Коши-Буняковского, длина вектора, угол между векторами, ортогональные векторы, ортонормированные векторы. Независимость ортонормированной системы векторов. Существование ортонормированного базиса в евклидовом пространстве. Критерий ортонормированности базиса.

5 Линейные операторы и линейные преобразования

Линейные операторы: основные понятия и определения. Линейные преобразования линейных пространств: определение, матрица, критерий невырожденности, инвариантность величины определителя матрицы линейного преобразования, формула для связи матриц одного и того же линейного преобразования в двух различных базисах одного и того же конечномерного линейного пространства. Множество значений и ядро линейного преобразования. Размерность пространства решений линейной однородной системы. Теоремы о структуре решений линейной однородной и неоднородной систем линейных уравнений. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования. Характеристический многочлен. Существование базиса из собственных векторов. Приведение матрицы линейного преобразования к диагональному виду. Ортогональные и симметричные преобразования.

6 Векторная алгебра

Векторы в R^3 : основные определения (равенство, коллинеарность, компланарность), линейные операции. Свойства множества векторов, плоскости (реального пространства), исходящих из одной

точки: линейное пространство, базис, размерность. Прямоугольная система координат в R^3 , координаты вектора, действия над векторами, заданными в координатной форме. Скалярная проекция вектора на ось: определение, свойства, геометрический смысл координат. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов: определения, свойства, формулы для вычисления, приложения.

7 Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве

Прямая на плоскости: различные способы задания, взаимное расположение. Плоскость в R^3 : различные способы задания (через точку перпендикулярно вектору, через точку параллельно двум неколлинеарным векторам, через три точки). Общее уравнение плоскости и нормаль к плоскости; уравнение плоскости «в отрезках». Взаимное расположение двух плоскостей, угол между плоскостями. Прямая на плоскости как частный случай уравнения плоскости. Прямая в R^3 : различные способы задания (через точку параллельно вектору, через две точки). Общее уравнение прямой. Взаимное расположение двух прямых, в том числе условие принадлежности одной плоскости; угол между прямыми. Прямая на плоскости как частный случай прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве, угол между прямой и плоскостью, определение координат точки пересечения прямой и плоскости.

8 Кривые и поверхности второго порядка

Линии на плоскости: основные понятия, определения, классификация. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола, их геометрические свойства и уравнения. Поверхности второго порядка: геометрические свойства, исследование формы методом сечений.

9 Линейные, билинейные и квадратичные формы

Линейные и билинейные формы: определение и свойства. Квадратичные формы: определение, свойства, представление в матричном виде, свойства матрицы квадратичной формы, инвариантность вида квадратичной формы, формулы связи матриц квадратичной формы в двух базисах. Понятие о каноническом виде, приведение квадратичной формы к каноническому виду. Вид квадратичной формы в базисе из собственных векторов, алгоритм перехода. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы, условия знакоопределенности. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

4.3 Практические занятия (семинары)

№ занятия	№ раздела	Тема	Кол-во часов
1	2, 3	Действия над матрицами. Вычисление определителей 2,3 и 4 порядков. Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными: правило Крамера, метод Гаусса, использование обратной матрицы. Ранг матрицы. Исследование систем m линейных уравнений с n неизвестными на совместность, построение общих решений.	2
2	4, 5	Линейные пространства и подпространства (базис, координаты, переход к новому базису). Линейные преобразования (проверка выполнения условий определения, построение матрицы, связь матриц в двух базисах). Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования.	2
3	6, 7	Скалярное, векторное и смешанное произведения. Плоскость и прямая в пространстве.	2
		Итого:	6

4.4 Контрольная работа (1 семестр)

Примерный вариант заданий для контрольной работы.

1. Выполните действия:
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите:
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & -8 & 5 & 10 \\ 5 & -8 & 5 & 8 \\ 6 & -5 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$
 тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы, методом Гаусса.

4. Исследуйте системы линейных уравнений на совместность, в случае совместности постройте

общее решение: а)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

5. Векторы $\vec{a} = \{5; 4; 1\}$, $\vec{b} = \{-3; 5; 2\}$, $\vec{c} = \{2; -1; 3\}$, $\vec{d} = \{7; 23; 4\}$ заданы своими координатами в некотором базисе. Докажите, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис и найдите координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

6. Определите размерность и укажите какой-нибудь базис пространства решений линейной

однородной системы
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

7. Вектор $\vec{x} = \{6; -1; 3\}$ задан своими координатами в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Найдите его координаты в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, если $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\vec{e}'_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

8. Пусть $x = \{x_1, x_2, x_3\}$. Выясните, являются ли линейными преобразования, указанные ниже:

а) $Ax = \{6x_1 - x_2 - 4x_3; -3x_1 - 2x_2 - x_3; x_2 + 2x_3\};$

б) $Bx = \{6 - 5x_2 - 4x_3; 3x_1 - 2x_2 - x_3; x_2 + 2\}$. В случае линейности преобразования, найдите его матрицу в том же базисе.

9. Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ линейного преобразования A задана в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Найдите её в базисе $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, если $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{e}'_3 = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

10. Матрица линейного преобразования A в некотором базисе имеет вид: $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдите собственные значения линейного преобразования и собственные векторы, им соответствующие.

11. Даны четыре точки $A(3;1;4)$, $B(-1;6;1)$, $C(-1;1;6)$, $D(0;4;1)$. Определите: а) объем пирамиды $ABCD$, б) длину высоты, опущенной из вершины D на плоскость грани ABC , и уравнение соответствующей ей прямой; в) угол между ребром AD и медианой треугольника ABC , проведенной из вершины A ; г) уравнение плоскости, проходящей через точку D параллельно плоскости ABC .

12. Фермер вложил в прошлом году в зерноводство, животноводство и овощеводство всего два миллиона денежных единиц и получил 180 тысяч денежных единиц прибыли. В текущем году он собирается увеличить вложения в овощеводство в 3 раза, в животноводство в 2 раза, а вложения в зерноводство оставить на прежнем уровне. На все это фермер выделяет 4 миллиона денежных единиц. Какую прибыль собирается получить фермер в текущем году, если зерноводство приносит 7% прибыли на вложенные средства, животноводство 8% и овощеводство 9%?

5 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

5.1 Основная литература

1. **Бортаковский А.С.** Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум: Учебное пособие / А.С. Бортаковский, А.В. Пантелеев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 352 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-16-010206-1, Режим доступа: <http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=476097>
2. Высшая математика для экономистов [Текст]: учебник /под. ред. Н.Ш. Кремера. -2-е изд. перераб. и доп. – М: Юнити, 2004. – 471 с.
3. **Курош, А. Г.** Курс высшей алгебры [Текст] : учеб. для вузов / А. Г. Курош.- 18-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2011. - 432 с. - (Классическая учебная литература по математике). - Библиогр.: с. 425-426. - Предм. указ.: с. 427-431. - ISBN 978-5-8114-0521-3.

5.2 Дополнительная литература

1. **Беклемишев, Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учеб. для вузов / Д. В. Беклемишев.- 10-е изд., испр. - М. : Физматлит, 2003. - 304 с. - ISBN 5-9221-0304-0.
2. **Благовисная, А. Н.** Практикум по решению задач линейной алгебры и аналитической геометрии с экономическим содержанием [Электронный ресурс] / Благовисная А. Н. - ГОУ ОГУ, 2009. Режим доступа: <http://artlib.osu.ru/>
3. **Головина, Л.И.** Линейная алгебра и некоторые ее приложения [Текст] – М:Наука, 1975-408 с.
4. **Ильин, В. А.** Аналитическая геометрия [Текст] : учебник / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .- 7-е изд., стер. - М. : Физматлит, 2007. - 224 с. - (Классический университетский учебник / ред. В. А. Садовничий).- (Курс высшей математики и математической физики / под ред. А. Н. Тихонова, В. А. Ильина, А. Г. Свешникова ; Вып. 3) - ISBN 978-5-9221-0511-8.

5. **Клетеник, Д. В.** Сборник задач по аналитической геометрии [Текст] : учеб. пособие для вузов / Д. В. Клетеник .- 14-е изд., испр. - М. : Наука, 1986. - 224 с.

6. **Красс, М. С.** Основы математики и ее приложения в экономическом образовании [Текст] : учеб. для вузов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. - М. : Дело, 2000. - 688 с.

7. **Проскуряков, И. В.** Сборник задач по линейной алгебре [Текст] : учеб. пособие для вузов / И. В. Проскуряков.- 8-е изд. - М. : ЛБЗ, 2001. - 384 с. - (Технический университет) - ISBN 5-93208-009-4.

8. **Руцкова, И. Г.** Линейная алгебра (Э) [Электронный ресурс]: электронный курс в системе Moodle / И. Г. Руцкова; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. образования "Оренбург. гос. ун-т". - Оренбург: ОГУ. - 2015. Режим доступа: <https://moodle.osu.ru/course/index.php?categoryid=88>

5.3 Периодические издания

Периодические издания не рекомендуются при изучении дисциплины.

5.4 Интернет-ресурсы

<https://moodle.osu.ru/course/index.php?categoryid=88> Линейная алгебра (Э) – электронный курс в системе Moodle Руцковой И.Г.;

<https://www.coursera.org/learn/algebra-lineynaya> - Линейная алгебра;

<https://www.lektorium.tv/mooc2/26288> - Линейная алгебра и аналитическая геометрия;

<http://ibooks.ru/> - электронная библиотечная система;

<http://biblioclub.ru/> - университетская библиотека ONLANE;

<http://e.lanbook.com/> - электронная библиотечная система издательства «Лань»;

<http://rucont.ru/> - электронная библиотека РУКОНТ;

<http://lib.mexmat.ru/> - электронная библиотека механико-математического факультета МГУ;

<http://moodle.osu.ru/> - электронная система обучения ОГУ;

<http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics.htm> - учебно-образовательная физико-математическая библиотека;

www.exponenta.ru – Internet-класс по высшей математике;

<http://www.wolframalpha.com/> - сайт, где можно проверить решение огромного количества задач.

5.5 Программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Операционная система Microsoft Windows

2. Пакет настольных приложений Microsoft Office (Word, Excel, PowerPoint, OneNote, Outlook, Publisher, Access)

3. Большая российская энциклопедия [Электронный ресурс].– Режим доступа: <https://bigenc.ru/>.

6 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, семинарского типа, для проведения групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Аудитории оснащены комплектами ученической мебели, техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещение для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой, подключенной к сети "Интернет", и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ОГУ.