

Минобрнауки России

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет имени В.А. Бондаренко»

Кафедра прикладной математики

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
ДИСЦИПЛИНЫ

«Б1.Д.В.4 Модели оптимального управления»

Уровень высшего образования

БАКАЛАВРИАТ

Направление подготовки

01.03.04 Прикладная математика
(код и наименование направления подготовки)

Математическое и компьютерное моделирование
(наименование направленности (профиля) образовательной программы)

Квалификация

Бакалавр

Форма обучения

Очная

Год набора 2026

Рабочая программа дисциплины «Б1.Д.В.4 Модели оптимального управления» рассмотрена и утверждена на заседании кафедры

Кафедра прикладной математики

наименование кафедры

протокол № 11 от "12" марта 2026 г.

Заведующий кафедрой

Кафедра прикладной математики

наименование кафедры

подпись

И.П. Болодурина

расшифровка подписи

Исполнители:

Доцент кафедры прикладной математики

должность

подпись

Ю.П. Луговскова

расшифровка подписи

должность

подпись

расшифровка подписи

СОГЛАСОВАНО:

Председатель методической комиссии по направлению подготовки

01.03.04 Прикладная математика

код наименование

личная подпись

расшифровка подписи

Заведующий отделом формирования фонда и научной обработки документов

личная подпись

С.А. Биктимирова

расшифровка подписи

Уполномоченный по качеству института

личная подпись

С.Н. Морозова

расшифровка подписи

№ регистрации _____

1 Цели и задачи освоения дисциплины

Цель (цели) освоения дисциплины: овладение теоретико-практической математической базой, направленной на изучение основ теории оптимального управления при моделировании динамических процессов; рассмотрение общих принципов построения необходимых и достаточных условий оптимальности и их применение к исследованию задач оптимального управления динамическими процессами непрерывной и дискретной природы.

Задачи:

- освоение математических подходов, методов, принципов моделирования оптимальных систем управления динамическими процессами, их аналитического и численного решения на базе современных компьютерных технологий;
- приобретение навыков содержательной интерпретации результатов приближенных решений, полученных при управлении динамическими процессами;
- рассмотрение различных постановок прикладных задач теории оптимального управления, их содержательной интерпретации, области применимости, методов их решения.

2 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к обязательным дисциплинам (модулям) вариативной части блока Д «Дисциплины (модули)»

Пререквизиты дисциплины: *Б1.Д.Б.19 Дифференциальные и разностные уравнения, Б1.Д.Б.21 Математические методы и модели исследования операций*

Постреквизиты дисциплины: *Б1.Д.Б.25 Моделирование эколого-экономических систем, Б2.П.В.П.3 Преддипломная практика*

3 Требования к результатам обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих результатов обучения

Код и наименование формируемых компетенций	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций
УК-2 Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений	УК-2-В-2 Формулирует цели и задачи проекта, структурирует этапы процесса организации проектной деятельности	Знать: -основные понятия и инструментарий математических дисциплин; базовую терминологию, относящуюся к теории оптимального управления; - основные необходимые и достаточные условия оптимальности, применяемые при решении задач оптимального управления; - численные методы решения задач оптимального управления; -способы организации самостоятельной работы при решении задач оптимального управления динамическими процессами

Код и наименование формируемых компетенций	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций
		<u>Уметь:</u> -самостоятельно применять необходимые и достаточные условия для аналитического и численного решения практических задач оптимального управления и анализировать полученные результаты в соответствии с теорией оптимального управления; - пользоваться приемами эффективного использования учебного времени, самоорганизации и контроля <u>Владеть:</u> -компьютерными технологиями и современными программными средствами для реализации различных методов и алгоритмов при решении задач оптимального управления динамическими процессами; - методами организации самостоятельной работы при решении задач оптимального управления динамическими процессами
ПК*-1 Способен переходить от содержательной постановки проблемы к математически формализованному описанию, проводить исследования на основе построенной модели, содержательно анализировать результаты	ПК*-1-В-1 Применяет математический инструментарий для описания процессов и систем в форме математических моделей, их последующего исследования и выработки решений	<u>Знать:</u> - методы и способы математического моделирования, роли математических моделей в современной науке; - трудности при переходе от реального объекта к его математической идеализации; подходы, позволяющие перейти от естественнонаучной сущности проблемы к формализованной задаче оптимального управления; <u>Уметь:</u> - предлагать пути решения задач оптимального управления, выбирать методику и средства; - систематизировать и обобщать результаты решения задач оптимального управления - использовать первоисточники научной литературы для самостоятельного изучения дополнительных разделов теории оптимального управления; самостоятельно изучать дополнительные разделы теории оптимального управления. <u>Владеть:</u> - навыками изучения математиче-

Код и наименование формируемых компетенций	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций
		ской литературы; методикой построения, анализа и применения математических моделей; -необходимыми знаниями для изучения дополнительных разделов теории оптимального управления; способами организации самостоятельного изучения дополнительных разделов теории оптимального управления
ПК*-2 Способен осуществлять математическое и компьютерное моделирование для анализа рисков и выработки оптимальных решений в различных отраслях	ПК*-2-В-3 Разрабатывает и/или применяет детерминированные и стохастические модели для анализа и выработки решений по управлению процессами и системами в различных отраслях	<u>Знать:</u> - общие принципы управления информацией для формулирования задачи оптимального управления - основные классы, типы задач теории оптимального управления; - способы организации самостоятельного изучения современных разделов теории оптимального управления. <u>Уметь:</u> -формулировать оптимизационные задачи, исходя из заданных условий, производить расчёты оптимальных законов управления, применять численные процедуры с использованием современных компьютерных технологий; <u>Владеть:</u> - навыками формализации задач оптимального управления; - навыками решения задач оптимального управления в зависимости от типа поставленной задачи - навыками обоснования выбора прикладного программного средства для решения задачи оптимального управления динамическими процессами

4 Структура и содержание дисциплины

4.1 Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы (144 академических часа).

Вид работы	Трудоемкость, академических часов	
	7 семестр	всего
Общая трудоёмкость	144	144
Контактная работа:	51,25	51,25
Лекции (Л)	34	34

Вид работы	Трудоемкость, академических часов	
	7 семестр	всего
Практические занятия (ПЗ)	16	16
Консультации	1	1
Промежуточная аттестация (зачет, экзамен)	0,25	0,25
Самостоятельная работа: - самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий; - изучение разделов курса в системе электронного обучения; - подготовка к практическим занятиям); - выполнение индивидуального творческого задания.	92,75	92,75
Вид итогового контроля (зачет, экзамен, дифференцированный зачет)	экзамен	

Разделы дисциплины, изучаемые в 7 семестре

№ раздела	Наименование разделов	Количество часов				
		всего	аудиторная работа			внеауд. работа
			Л	ПЗ	ЛР	
1	Постановка и формализация задач оптимального управления динамическими системами	18	4	2		12
2	Необходимые условия оптимальности в задачах оптимального управления. Математические и вычислительные аспекты методов и алгоритмов решения задач оптимального управления на основе необходимых условий оптимальности	24	8	4		12
3	Необходимое условие оптимальности в дискретных задачах оптимального управления. Численные алгоритмы решения задач оптимального управления.	26	6	4		16
4	Линейная задача оптимального быстрогодействия	24	6	2		16
5	Связь принципа максимума и вариационного исчисления	20	2	2		16
6	Оптимальное управление при решении практических задач	17	4	1		12
7	Особые оптимальные управления	15	4	1		10
	Итого:	144	34	16		94
	Всего:	144	34	16		94

4.2 Содержание разделов дисциплины

Раздел 1 Постановка и формализация задач оптимального управления динамическими системами

Исходные данные для постановки задач оптимального управления (ЗОУ): модель описания динамического объекта в пространстве состояний, граничные условия, ограничения, виды функционалов качества. Классификация задач оптимального управления по способу задания ограничений и виду критерия оптимизации (задачи Лагранжа, Больца, Майера, задачи быстрогодействия, стабилизации, с нефиксированным временем). Примеры постановок ЗОУ. Общая постановка задач оптимального управления. Определение допустимого процесса, оптимального решения. Задача оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями. Разрывная задача оптимального управления.

Раздел 2 Необходимые условия оптимальности в задачах оптимального управления. Математические и вычислительные аспекты методов и алгоритмов решения задач оптимального управления на основе необходимых условий оптимальности

Необходимые условия оптимальности для задачи со свободным правым концом и фиксированным временем. Необходимые условия оптимальности для задачи Больца. Алгоритм построения оптимального управления в случае его существования и единственности. Принцип максимума Понтрягина для задачи Майера со свободным правом концом и заданным временем. Принцип максимума Понтрягина для задачи Больца. Краевая задача принципа максимума. Алгоритм построения оптимального управления. Недостаточность принципа максимума. Метод множителей Лагранжа для задачи оптимального управления. Принцип максимума для задач с произвольным временем окончания процесса управления. Принцип максимума для задач с изопериметрическими ограничениями. Непрерывность функции Гамильтона на оптимальном управлении и траектории. Свойство производных функции Гамильтона. Метод множителей Лагранжа в дискретной задаче оптимального управления со смешанными ограничениями. Методы основанные на необходимых условиях оптимальности: итерационный метод, метод проекции градиента. Учет граничных условий и фазовых ограничений в дискретной задаче оптимального управления методом штрафных функций.

Раздел 3 Необходимое условие оптимальности в дискретных задачах оптимального управления. Численные алгоритмы решения задач оптимального управления.

Дискретный принцип максимума. Метод множителей Лагранжа в дискретной задаче оптимального управления со смешанными ограничениями. Численные методы решения задач оптимального управления, основанные на необходимых условиях оптимальности: итерационный метод, метод проекции градиента. Учет граничных условий и фазовых ограничений в дискретной задаче оптимального управления методом штрафных функций.

Раздел 4 Линейная задача оптимального быстродействия.

Постановка линейной задачи оптимального управления. Условие общности положения. Теорема о конечном числе переключений в оптимальном управлении. Теорема о количестве переключений для линейной задачи быстродействия. Достаточные условия оптимальности в линейной задаче быстродействия. Условия существования оптимального управления в линейной задаче оптимального быстродействия.

Раздел 5 Связь принципа максимума и вариационного исчисления.

Задачи вариационного исчисления. Необходимое условие Эйлера для решения вариационного исчисления. Возможные формулировки условий теоремы Эйлера. Связь теоремы Эйлера вариационного исчисления и теоремы Понтрягина оптимального управления. Задача Больца в вариационном исчислении

Раздел 6 Оптимальное управление при решении практических задач

Модель регулирования трудовыми ресурсами. Классический пример Понтрягина с лодкой. Модель Рамсея. Модель оптимального потребления. Задача оптимального управления инвестициями в двухсекторной экономике.

Раздел 7 Особые оптимальные управления

Понятие особого оптимального управления для некоторой задачи оптимального управления. Особый режим. Построение особого оптимального управления. Необходимые условия оптимальности особого управления. Необходимые условия Келли оптимальности особого управления. Необходимые условия Коппа-Мойера. Примеры. Четеринг-режимы. Пример построения четеринг-режима для некоторой задачи.

4.3 Практические занятия (семинары)

№ занятия	№ раздела	Тема	Кол-во часов
1	1	Примеры построения конкретных моделей управляемых процессов экономической и физической природы. Простейшая система «хищник-жертва». Задача оптимального распределения капитальных вложений на заданном интервале планирования. Задача о прямолинейном движении управляемого физического объекта. Примеры построения конкретных моделей управляемых процессов экономической и физической природы. Простейшая система «хищник-жертва». Задача оптимального распределения капитальных вложений на заданном интервале планирования. Задача о прямолинейном движении управляемого физического объекта.	2
2-3	2	Нахождение оптимального программного управления на основе необходимых условий оптимальности.	4
4-5	3	Применение принципа максимума к решению дискретных задач.	4
6	4	Линейная задача оптимального быстрогодействия	2
7	5	Задачи вариационного исчисления, их связь с принципом максимума	2
8	6,7	Исследование особых оптимальных управлений для некоторых моделей оптимального управления. Решение задачи оптимального управления инвестициями в двухсекторной экономике.	2
		Итого:	16

5 Учебно-методическое обеспечение дисциплины

5.1 Основная литература

1. Андреева, Е. А. Математическое моделирование [Текст] : учеб. пособие для вузов / Е. А. Андреева, В. М. Цирулева. - Тверь : ТвГУ, 2004. - 502 с.
2. Лагоша, Б. А. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения [Текст] : учеб.

пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности 080116 "Математические методы в экономике" / Б. А. Лагоша, Т. Г. Апалькова.- 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Финансы и статистика, 2008. - 224 с.

3. Болодурина, И. П. Теория оптимального управления [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов, обучающихся по программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика / И. П. Болодурина [и др.]; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. образования "Оренбург. гос. ун-т". - Оренбург : ОГУ. - 2016.

4. Андреева, Е.А., Болодурина, И.П., Арапова, О.С., Огурцова, Т.А. Математическое моделирование и оптимальное управление: учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 151 с.

5.2 Дополнительная литература

1. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления – М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.

2. Болодурина, И. П. Теория оптимального управления в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 01.03.04 Прикладная математика / И. П. Болодурина, Ю. П. Луговскова; М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. образования "Оренбург. гос. ун-т". - Электрон. дан. - Оренбург : ОГУ, 2025. - 1 электрон. опт. диск (CD-R). - Загл. с этикетки диска. - Систем. требования: Intel Core или аналогич.; Microsoft Windows 7, 8, 10 ; 512 Мб ; монитор, поддерживающий режим 1024x768 ; мышь или аналогич. устройство. - ISBN 978-5-7410-3389-0.. - № гос. регистрации 0322501971.

3. Ванько, В. И. Вариационное исчисление и оптимальное управление [Текст] : учебник для вузов / В. И. Ванько, О. В. Ермошина, Г. Н. Кувыркин; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко.- 3-е изд., испр. - М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. - 488 с. - (Математика в техническом университете ; вып. XV). - Библиогр.: с. 475-479. - Предм. указ.: с. 480. - ISBN 5-7038-2484-2.

4. Галеев Э.М., Осмоловский Н.П., Тихомиров В.М. Оптимальное управление – М.: МЦНМО, 2008. – 320 с.

5. Осмоловский Н. П. Оптимальное управление [Электронный ресурс] / под ред. Н. П. Осмоловский, В. М. Тихомиров. – Москва: МЦНМО, 2008. – 320 с. – ISBN 978-5-94057-367-8. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63270> .

6. Основы теории оптимального управления./В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша, С.М. Лобанов и др. – М.: Высш.шк., 1990.

5.3 Периодические издания

1 Математическое моделирование : журнал. - М. : АРСМИ.

2 Прикладная математика и механика : журнал. - М. : Агентство "Роспечать"

3. Информационные технологии : журнал. - М. : Агентство "Роспечать"

4. Вестник компьютерных и информационных технологий : журнал. - М. : Агентство "Роспечать"

5.4 Интернет-ресурсы

<http://www.exponenta.ru/> - Математический сайт с большим количеством методических материалов по высшей математике и математическим компьютерным пакетам

<http://www.math.ru/> - Научно-популярный математический сайт

<http://www.intuit.ru> – сайт Интернет-университета информационных технологий, представляет учебные курсы по разным областям ИТ

<http://allmatematika.ru/> - Форум по математике;
<http://www.edu.ru/> - Федеральный портал «Российское образование»;
<http://www.orenport.ru/> - Региональный портал образовательного сообщества Оренбуржья;
<http://www.msu.ru> - Сайт Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова
«Differential Equations for Engineers» [Электронный ресурс]: онлайн-курс на платформе
<https://www.coursera.org> / Разработчик курса: The Hong Kong University of Science and Technology режим доступа: <https://www.coursera.org/learn/differential-equations-engineers>

5.5 Программное обеспечение, профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. Операционная система РЕД ОС.
2. Пакет офисных приложений «МойОфис Образование»
3. Для работы с ресурсами Интернет - веб-браузер Яндекс <https://yandex.ru/>.
4. ГАРАНТ Платформа F1 [Электронный ресурс]: справочно-правовая система. / Разработчик ООО НПП «ГАРАНТ-Сервис», 119992, Москва, Воробьевы горы, МГУ, [1990–2026]. – Режим доступа в сети ОГУ <http://garant.net.osu.ru>
5. Автоматизированная интерактивная система сетевого тестирования - АИССТ (зарегистрирована в РОСПАТЕНТ, Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2011610456, правообладатель – Оренбургский государственный университет), режим доступа - <http://aist.osu.ru>.

6 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа, семинарского типа, для проведения групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации.

Аудитории оснащены комплектами ученической мебели, техническими средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещение для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой, подключенной к сети "Интернет", и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ОГУ.

К рабочей программе прилагаются:

- Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине;
- Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.